



ISAV2022

دوازدهمین کنفرانس بین المللی آگوستیک و ارتعاشات

تهران - ایران ۲۳ و ۲۴ آذر ماه ۱۴۰۱



تحلیل ارتعاش آزاد نانو صفحه مستطیلی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی به روش توابع پتانسیل

پروانه ناطقی بابگی^۱، بهرام نوائی نیا^{۲*}، مرتضی اسکندری قادی^۳

^۱ ایران، بابل، خیابان دکتر شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده عمران، ۷۱۱۶۷-۴۷۱۴۸، دانشجوی دکتری.

^۲ ایران، بابل، خیابان دکتر شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده عمران، ۷۱۱۶۷-۴۷۱۴۸، استاد.

^۳ ایران، تهران، خیابان انقلاب اسلامی، دانشگاه تهران، ۱۱۱۵۵-۴۵۶۳، استاد.

navayi@nit.ac.ir*

چکیده

هدف از تحقیق حاضر، تحلیل سه بعدی ارتعاش آزاد نانو صفحات همسانگرد با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی می باشد. بدین منظور ابتدا معادلات حرکت سه بعدی برای محیط همسانگرد همگن با استفاده از تئوری وابسته به ابعاد الاستیسیته غیرمحلی محاسبه می شود. سپس با استفاده از توابع پتانسیل تغییرمکان مناسب معادلات حرکت مستقل می گردد. معادلات حاکم مستقل بدست آمده شامل معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه ۴ است. در ادامه، معادلات حاکم مذکور به روش جداسازی متغیرها و اعمال دقیق شرایط مرزی حل و نتایج عددی برای مساله ارتعاش آزاد ارائه می گردد. مقایسه نتایج بدست آمده از این تحقیق و نتایج موجود شبیه سازی دینامیک مولکولی صحت روش ارائه شده را به خوبی اثبات می کند. روش ارائه شده در این تحقیق را می توان برای تعیین دقیق فرکانس های طبیعی نانو صفحات همسانگرد بدون محدودیت در ابعاد و ضخامت صفحه، به کار برد. همچنین نتایج تحلیل نشان می دهد که افزایش پارامتر غیرمحلی با در نظر گرفتن اثر کرنش های دوردست باعث کاهش میزان فرکانس طبیعی نانو صفحه خواهد شد.

کلمات کلیدی: توابع پتانسیل تغییرمکان؛ تئوری الاستیسیته غیرمحلی؛ نانو صفحه؛ ارتعاش آزاد.

فناوری نانو در بسیاری از زمینه‌ها از جمله داروسازی، عمران، کشاورزی، پایداری منابع، هوافضا و الکترونیک حوزه جدیدی را برای تحقیق و توسعه گشوده است. با کاهش ابعاد سازه‌ها، خواص مواد از جمله مشخصات مکانیکی، حرارتی و سایر موارد شناخته شده دچار تغییرات چشمگیری می‌شود. برای مطالعه چگونگی تاثیر ابعاد کوچک بر رفتار سازه‌ها محققان از روش‌های مختلفی مانند روش-های آزمایشگاهی^۱، شبیه‌سازی دینامیک مولکولی^۲ و مکانیک محیط پیوسته^۳ بهره برده‌اند [1]. یکی از پرکاربردترین تئوری‌های غیرکلاسیک مکانیک محیط پیوسته، تئوری الاستیسیته غیرمحلی می‌باشد. در ابتدا کرونر^۴ [2] تئوری الاستیسیته غیرمحلی را ارائه داد و پس از آن این تئوری توسط ارینگن^۵ [3-4] بهبود پیدا کرد. بر طبق تئوری مذکور، تنش در یک نقطه مرجع با یک وابستگی پیوسته به کرنش تمام نقاط مربوط می‌شود و بنابراین اثر اندازه توسط یک پارامتر غیرمستقیم در معادلات ساختاری در نظر گرفته می‌شود. این تئوری در ابتدا به شکل انتگرالی تعریف شد، ولی در ادامه با در نظر گرفتن یک تابع مرکزی خاص توسط ارینگن به صورت دیفرانسیلی تبدیل شد. مدل ارینگن [4] به دلیل سادگی در انجام محاسبات در مقایسه با مدل انتگرالی، به طور گسترده‌ای برای تحلیل نانو سازه‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. تاکنون تعداد زیادی از مدل‌های وابسته به اندازه براساس ترکیب تئوری الاستیسیته غیرمحلی با تئوری-های مختلف تیر و صفحه به جهت تحلیل محیط‌های یک و دو بعدی ارائه شده‌اند [5-8]. از آن جمله می‌توان به تئوری مرتبه بالاتر غیرمحلی که توسط آقا بابایی و ردی^۶ [9] برای تحلیل نانو صفحات همسانگرد ارائه شده، اشاره کرد. ایشان با بازنویسی معادلات تئوری پیشنهادی ردی بوسیله روابط ساختاری ارینگن مدل خود را استخراج کردند. بعلاوه، یک حل بسته برای مسائل خمش و ارتعاش آزاد نانو صفحه با تکیه‌گاه ساده را نیز محاسبه نمودند. حسینی هاشمی و همکاران [10] نیز با این مدل و بهره‌گیری از روش لوی، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی نانو صفحه همسانگرد با شرایط مرزی گوناگون را بدست آوردند. انصاری و همکاران [11] با استفاده از ترکیب تئوری کلاسیک صفحات و تئوری غیرمحلی مسئله ارتعاش آزاد نانو صفحه همسانگرد گرافن را به روش گالرکین حل و در ادامه ضمن مقایسه نتایج با روش دینامیک مولکولی، پارامتر غیرمحلی نانو صفحه گرافن را محاسبه نمودند. از سوی دیگر، استفاده از توابع پتانسیل روشی کارا و موثر در تحلیل دقیق مسائل الاستیسیته می‌باشد که در این میان توابع پتانسیل تغییر مکان بدلیل تعداد کمتر معادلات نسبت به توابع پتانسیل تنش کاربرد بیشتری یافته است. مجموعه شناخته شده‌ای از توابع پتانسیل تغییر مکان در محیط ماکرو عبارتند از: بوسینسک، پاپکوویچ-نوبر، گالرکین و دیگر توابع شناخته شده تغییر مکان که با هم رابطه داشته و از یکدیگر قابل حصول می‌باشند [12]. توابع پتانسیل اسکندری قادی که با تعمیم توابع پتانسیل حاکم بر محیط‌های همسانگرد جانبی از حالت استاتیکی به دینامیکی ارائه شده است نیز به طور گسترده برای تحلیل محیط‌های نیمه بی‌نهایت مورد مطالعه قرار گرفته است [13]. علاوه بر این، توابع پتانسیل اسکندری قادی، برای تحلیل ارتعاش آزاد صفحات همسانگرد و همسانگرد جانبی مورد استفاده قرار گرفته است [14]. استفاده از روش توابع پتانسیل علاوه بر مقیاس ماکرو برای تحلیل نانو صفحات نیز توسط عبدالله‌زاده شهرابی [15] مورد استفاده قرار گرفته است. ایشان با بهره‌گیری از تابع پتانسیل هلمهولتز و تئوری ارتجاعی غیرمحلی معادلات حاکم بر ارتعاش نانوصفحات را محاسبه و آن را برای شرایط مرزی متفاوت به روش گالرکین حل نموده‌اند. ناطقی و همکاران [16] نیز با استفاده از یک روش سیستماتیک توابع پتانسیل تغییر مکان برای مسائل الاستودینامیک در نانو محیط همسانگرد جانبی را براساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی، گرادیان کرنش و الاستیسیته غیرمحلی ارائه نمودند.

حجم گسترده‌ای از پژوهش‌های تحلیلی و عددی انجام شده در زمینه تحلیل محیط‌های مختلف میکرو و نانو تاکنون مربوط به سازه‌های یک بعدی نظیر نانوتیرها بوده است که دارای معادلات حاکم ساده‌تری در مقایسه با صفحات هستند. همچنین طیف نسبتاً وسیع دیگری از تحقیقات بر روی نانو صفحات به صورت دوبعدی بوده و مطالعات انجام شده در زمینه‌ی تحلیل سه بعدی نانوصفحات بسیار محدودتر و اغلب به صورت عددی و یا دارای فرضیات ساده‌شونده می‌باشند. به منظور پرکردن این خلا تحقیقاتی در این پژوهش

¹ Experimental methods

² Molecular dynamics simulation

³ Continuum mechanics

⁴ Kroner

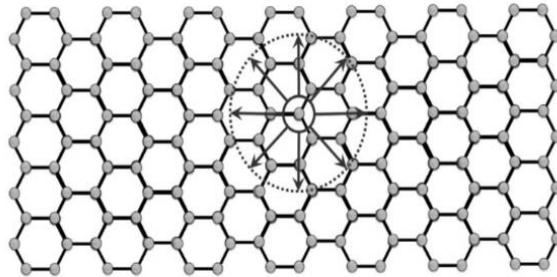
⁵ Eringen

⁶ Reddy

به تحلیل دقیق سه بعدی نانو صفحات همسانگرد دارای تکیه‌گاه ساده با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی و روش تابع پتانسیل تغییرمکان پرداخته می‌شود. بدین منظور، در ابتدا معادلات حرکت سه بعدی براساس تئوری غیرمحملی محاسبه و سپس با استفاده از توابع پتانسیل ناطقی و همکاران [16] از یکدیگر مستقل می‌شوند. در ادامه معادلات دیفرانسیل حاکم بدست آمده برحسب توابع پتانسیل با استفاده از روش جداسازی متغیرها به همراه اعمال دقیق شرایط مرزی حل شده و معادله مشخصه ارتعاش آزاد نانو صفحه بدست می‌آید. با حل معادله مشخصه بدست آمده فرکانس‌های ارتعاش آزاد نانو صفحه با تکیه‌گاه ساده به صورت دقیق بدست می‌آید.

۲- تئوری

تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن تاثیر میدان کرنش دوردست را که به عنوان اثرات غیرمحملی شناخته می‌شوند، مطابق شکل (۱) در نظر می‌گیرد.



شکل ۱. وابستگی تنش در یک نقطه خاص به کرنش در نقاط دوردست [۱]

به عبارت دیگر، طبق تئوری الاستیسیته غیرمحملی میدان تنش در یک نقطه مشخص، علاوه بر کرنش الاستیک همان نقطه به کرنش نقاط دیگر محیط نیز وابسته است. کلی‌ترین شکل رابطه ساختاری برای الاستیسیته غیرمحملی شامل یک انتگرال بر روی کل محیط می‌باشد. این انتگرال شامل یک رابطه مرکزی^۷ است که اثرات کرنش‌ها در نقاط مختلف را بر روی میدان تنش در مکان مشخص نشان می‌دهد و مدول غیرمحملی نامیده می‌شود. در این تئوری اثرات مقیاس کوچک با لحاظ کردن ابعاد داخلی به عنوان یک پارامتر مشخصه ماده که امکان کار با متغیرهای غیرمحملی را می‌دهد، بیان می‌شود [۳].

۲-۱ روابط ریاضی حاکم در تئوری الاستیسیته غیرمحملی

مفاهیم پایه‌ای الاستیسیته غیرمحملی برای یک محیط الاستیک خطی و همگن در غیاب نیروهای حجمی به شکل روابط (۱) تا (۴) در نظر گرفته می‌شوند [۱].

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi) \sigma_{ij}^c(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^c(\mathbf{x}') = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} (u_{k,l}(\mathbf{x}') + u_{l,k}(\mathbf{x}')). \quad (4)$$

بطوری‌که پارامترهای u_j ، \ddot{u}_j ، ρ ، σ_{ij} ، σ_{ij}^c ، ε_{kl} و C_{ijkl} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بردار تغییرمکان، شتاب، چگالی، تنش غیرمحملی، تنش کلاسیک و تانسور مرتبه چهارم الاستیسیته می‌باشند. تابع $H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi)$ مدول غیرمحملی یا رابطه مرکزی انتگرال (با بعد معکوس مکعب طول) و φ پارامتر غیرمحملی بدون بعد بوده و مطابق رابطه (۵) تعریف می‌شود [۳-۴]:

$$\varphi = \frac{e_0 a}{L} \quad (5)$$

⁷ Kernel function

که در آن e_0 ، a و L به ترتیب ثابت غیرمحملی (بی‌بعد) متناسب با هر ماده، طول مشخصه داخلی (بعد طول) و طول مشخصه خارجی (بعد طول) می‌باشند. از آنجایی که، معادله حاکم بر الاستیسیته غیرمحملی، رابطه (۱)، به صورت یک رابطه دیفرانسیلی-انتگرالی بیان می‌شود، حل آن به صورت کلی بسیار مشکل است. برای برطرف نمودن این مشکل با اعمال یک اپراتور دیفرانسیل خطی ℓ به صورت رابطه (۶) بر رابطه (۲)، در نهایت رابطه ساختاری غیرمحملی ارینگن به صورت رابطه (۷) ارائه می‌گردد [۴]:

$$\ell(H(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varphi)) = \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (۶)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (۷)$$

در روابط فوق پارامترهای δ و ∇^2 به ترتیب معرف تابع دلتای دیراک^۸ و اپراتور لاپلاس^۹ سه بعدی می‌باشند.

برای محاسبه معادلات حاکم بر حرکت غیرمحملی، عملگر معادل آن بر روی رابطه (۱) اعمال می‌شود، سپس نتایج به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید.

$$\nabla_e^2 \sigma_{ij,i} = \nabla_e^2 \left(\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \quad (۸)$$

با توجه به اینکه مواد همسانگرد دارای دو ضریب الاستیک مستقل λ و μ در تانسور تنش-کرنش هستند، بنابراین با جایگذاری روابط کرنش بر حسب تغییرمکان (۴) در رابطه (۸)، معادلات حاکم حرکت غیرمحملی بر حسب میدان تغییرمکان به شکل روابط (۹) تا (۱۱) حاصل می‌شود.

$$\left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^2 \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) \quad (۹)$$

$$\left[\begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^2 \left(\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) \quad (۱۰)$$

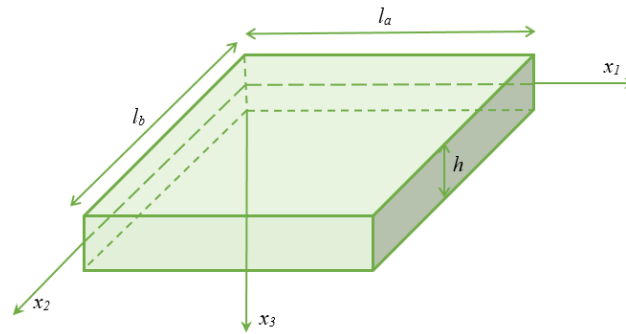
$$\left[\begin{array}{l} \lambda \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) \end{array} \right] = \nabla_e^2 \left(\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) \quad (۱۱)$$

۲-۲ بیان مساله

یک نانو صفحه مستطیلی همسانگرد با تکیه‌گاه ساده و ابعاد l_a ، l_b و h در یک سیستم مختصات دکارتی (x_1, x_2, x_3) به صورت شکل (۲) در نظر گرفته شده است.

^۸ Dirac delta function

^۹ Laplacian operator



شکل ۲. موقعیت محورها و ابعاد نانوصفحه مستطیلی

تحلیل ارتعاش آزاد نانو صفحه در غیاب نیروهای حجمی در این بخش مورد بررسی قرار می گیرد. بدین منظور باید معادلات دیفرانسیل حاکم غیرمحملی برحسب توابع پتانسیل پیشنهادی ناطقی و همکاران برای نانو محیط همسانگرد [۱۶] حل شود.

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} F \\ u_2 = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} F \\ u_3 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \left(\nabla^2 - \frac{\nabla_e^2 \partial^2}{(\lambda + 2\mu) \partial t^2} \right) F \end{cases} \quad (12)$$

با جایگذاری توابع پتانسیل تغییرمکان (۱۲) در معادلات حاکم بر حسب تغییرمکان (۹) تا (۱۱) و ساده سازی روابط در نهایت معادله دیفرانسیل حاکم (۱۳) برحسب تابع پتانسیل F بدست می آید.

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \nabla_e^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{\rho}{\mu} \nabla_e^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] F = 0 \quad (13)$$

با فرض اینکه نانو صفحه دارای حرکت هارمونیک است، می توان مولفه های تابع پتانسیل F و بردار جابه جایی \mathbf{w} را به شکل زیر تعریف کرد.

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{F}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t} \quad (14)$$

$$\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{\mathbf{w}}(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t} \quad (15)$$

که ω برابر بسامد زاویه ای است. با جایگذاری رابطه (۱۴) در معادله (۱۳)، معادله حرکت غیرمحملی (۱۶) در فضای فرکانس بدست می آید.

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)} \nabla_e^2 \right) \left(\nabla^2 - \frac{\rho \omega^2}{\mu} \nabla_e^2 \right) \right] \bar{F} = 0 \quad (16)$$

سپس با تعریف تابع پتانسیل به صورت ضرب سه تابع مستقل $f(x_1)$ ، $g(x_2)$ و $h(x_3)$ به شکل $\bar{F}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)g(x_2)h(x_3)$ و جایگذاری آن در معادله حاکم (۱۶) و حل معادله دیفرانسیل بدست آمده به روش جدایی متغیرها و اعمال دقیق شرایط مرزی هندسی (۱۷) تابع پتانسیل \bar{F} به شکل رابطه (۱۸) بدست می آید.

$$\begin{cases} u_2 = u_3 = 0, & x_1 = 0, l_a \\ u_1 = u_3 = 0, & x_2 = 0, l_b \end{cases} \quad (17)$$

$$\bar{F} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{l_a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_b} x_2\right) \left(\bar{c}_1 \cosh(\varphi_1 x_3) + \bar{c}_2 \sinh(\varphi_1 x_3) + \bar{c}_3 \cosh(\varphi_2 x_3) + \bar{c}_4 \sinh(\varphi_2 x_3) \right) \quad (18)$$

که در رابطه (۱۸)، m و n اعداد طبیعی مثبت؛ پارامترهای \bar{c}_1 تا \bar{c}_4 ضرایب مجهول و φ_1 و φ_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\left(\alpha_{mn}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} - \alpha_{mn}^2 \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} (e_0 a)^2 \right)}{\left(\frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)} (e_0 a)^2 - 1 \right)}} \quad (19)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{\left(\alpha_{mn}^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu} - \alpha_{mn}^2 \frac{\rho\omega^2}{\mu} (e_0 a)^2 \right)}{\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu} (e_0 a)^2 - 1 \right)}} \quad (20)$$

که در روابط فوق $\alpha_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \alpha_n^2$ می‌باشد. در ادامه با اعمال شرایط مرزی نیرویی تنش در بالا و پایین صفحه برابر صفر و محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب مجهول، معادله مشخصه ارتعاش آزاد صفحه محاسبه می‌شود. برای حل این معادله مشخصه و استخراج نتایج عددی از کدنویسی در نرم‌افزار matlab استفاده شده است.

۳- نتایج

مشخصات نانو صفحه در نظر گرفته شده برای این تحقیق در جدول (۱) بیان شده است.

جدول ۱: مشخصات مکانیکی نانو صفحه گرافن [۱۱]

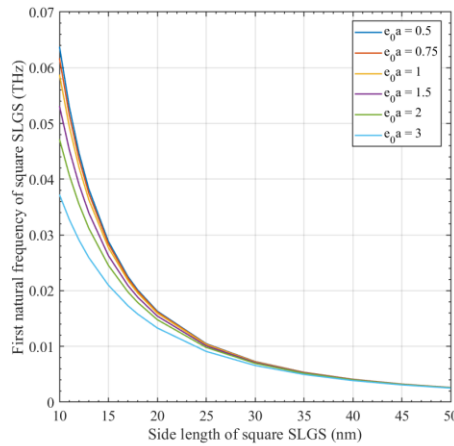
Young's Modulus (E)	1 TPa
Poisson ratio (ν)	0/16
Density (ρ)	2250 kg/m ³
Thickness (h)	0/34 nm

برای بررسی صحت حل انجام شده، مقایسه‌ای بین نتایج اولین فرکانس طبیعی نانو صفحه مربعی با مشخصات فوق و برای پارامتر غیرمحملی برابر با ۱/۰۳ نانومتر با نتایج مرجع [۱۱] مطابق جدول (۲) صورت پذیرفت. همانطور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود مقایسه نتایج حاکی از دقت بالای محاسبات تحقیق حاضر می‌باشد. بطوریکه اختلاف موجود بین نتایج محاسبه شده و روش دینامیک مولکولی حداکثر به ۳/۴۳۲۵ درصد می‌رسد.

جدول ۲: مقایسه نتایج اولین فرکانس طبیعی نانو صفحه مربعی (11 ω) گرافن با نتایج مرجع [۱۱]

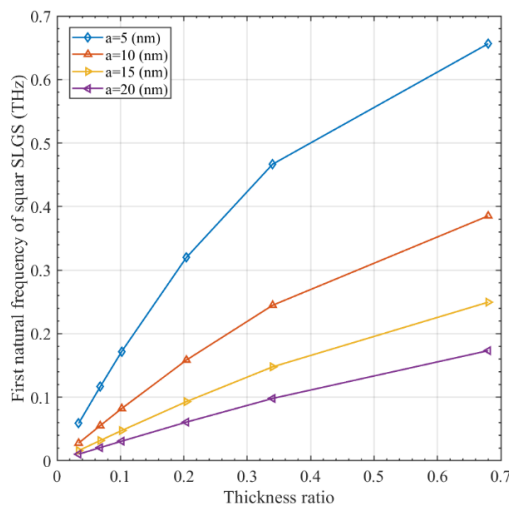
نتایج روش کلاسیک صفحات غیرمحملی [11] (تراهرتز)	درصد اختلاف با نتایج دینامیک مولکولی	نتایج تحقیق حاضر (تراهرتز)	نتایج دینامیک مولکولی [11] (تراهرتز)	طول صفحه گرافن (نانومتر)
0/0584221	0/0088	0/0587673	0/0587725	10
0/0282888	1/2432	0/0277286	0/0273881	15
0/0164593	1/3135	0/0159593	0/0157524	20
0/0107085	3/4325	0/0103267	0/0099840	25
0/0075049	2/1145	0/0072149	0/0070655	30
0/0055447	0/4190	0/0053204	0/0052982	35
0/0042608	0/3733	0/0040832	0/0040985	40
0/0033751	0/8985	0/0032316	0/0032609	45
0/0027388	0/0496	0/0026207	0/0026194	50

در شکل (۳)، فرکانس‌های طبیعی اول نانو صفحه گرافن مربعی دارای طول از ۱۰ تا ۵۰ نانومتر و به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی ترسیم شده است.

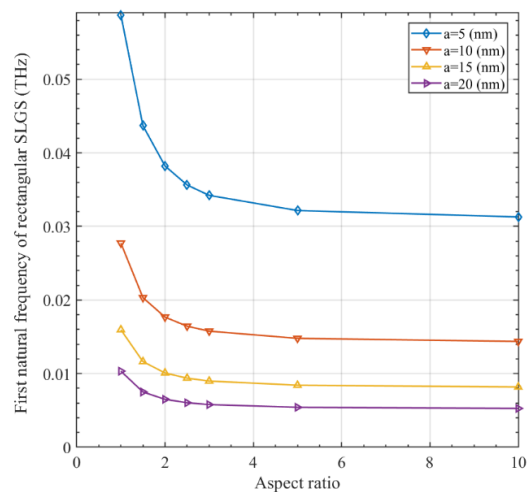


شکل ۳. فرکانس طبیعی نانو صفحه گرافن مربعی به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحملی

مشاهده می‌شود که رفتار ارتعاشی صفحات با ابعاد کوچک، زیر ۲۰ نانومتر نسبت به تغییرات پارامتر غیرمحملی بسیار حساس هستند. در حالیکه با افزایش ابعاد صفحه و برای صفحات با بعد بزرگتر از ۳۰ نانومتر این حساسیت به صورت چشمگیری کاهش یافته است. علاوه بر این، افزایش پارامتر غیرمحملی با در نظر گرفتن اثر کرنش‌های دوردست باعث کاهش میزان فرکانس طبیعی نانو صفحه شده است. به منظور بررسی اثرات نسبت ضخامت به طول صفحه (h/l_a) و نسبت ابعاد (l_a/l_b) بر رفتار ارتعاشی نانو صفحات، نتایج بدست آمده برای فرکانس طبیعی مود اول نانو صفحه گرافن به ازای پارامتر غیرمحملی برابر یک در شکل‌های (۴) و (۵) آورده شده است.



شکل ۵. فرکانس طبیعی نانو صفحه گرافن به ازای مقادیر مختلف نسبت ضخامت



شکل ۴. فرکانس طبیعی نانو صفحه گرافن به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعاد

شکل (۴) نشان می‌دهد که فرکانس طبیعی نانو صفحه با افزایش نسبت ابعاد صفحه کاهش یافته که این کاهش در مقادیر فرکانس برای صفحات دارای ابعاد کوچکتر محسوس‌تر است ولی در هر حال بعد از نسبت ابعاد ۴ تغییرات قابل ملاحظه‌ای در رفتار ارتعاشی صفحه مشاهده نمی‌شود. در شکل (۵)، می‌توان مشاهده نمود که اثرات افزایش نسبت ضخامت صفحه نیز در صفحه دارای بعد ۵ نانومتر مشهودتر است. همچنین، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش نسبت ضخامت نانو صفحه مربعی باعث به وجود آمدن ارتعاش-هایی با فرکانس طبیعی بزرگتر خواهد شد.

۴- نتیجه‌گیری

- در این پژوهش، فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد نانو صفحات مستطیلی همسانگرد با لبه‌های ساده براساس تئوری غیرمحملی و به صورت تحلیل دقیق سه بعدی به دست آمده است. برخی از مهمترین نتایج حاصل از این تحقیق عبارتند از:
- روش ارائه شده در این پژوهش را می‌توان برای تعیین دقیق فرکانس‌های طبیعی نانو صفحات همسانگرد بدون محدودیت در ابعاد و ضخامت صفحه، به کار برد.
 - افزایش پارامتر غیرمحملی با در نظر گرفتن اثر کرنش‌های دوردست باعث کاهش میزان فرکانس طبیعی نانو صفحه می‌شود.
 - فرکانس طبیعی نانو صفحه با افزایش نسبت ابعاد صفحه کاهش یافته که این کاهش در مقادیر فرکانس برای صفحات دارای ابعاد کوچکتر در حد ۵ نانومتر محسوس تر است.
 - افزایش نسبت ضخامت نانو صفحه باعث افزایش سختی سیستم و در نتیجه به وجود آمدن ارتعاش‌هایی با فرکانس طبیعی بزرگتر می‌گردد.

مراجع

- [1] D. Karličić, T. Murmu, S. Adhikari and M. McCarthy, *Non-local Structural Mechanics*, Great Britain: John Wiley & Sons, 2016.
- [2] E. Kroner, *Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*. *Int J Solids Struct*, vol. 3, p.731-742, 1967.
- [3] A. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Littleton: Springer, 2000.
- [4] A. Eringen, "On differential-equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves," *Journal of Applied Physics*, vol. 54, no. 9, p. 4703-4710, 1983.
- [5] Ö. Civalek and C. Demir, "Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, p. 2053-2067, 2011.
- [6] J. W. Yan, L. H. Tong, C. Li, Y. Zhu and Z. W. Wang, "Exact Solutions of Bending Deflections for Nano-beams and Nano- plates Based on Nonlocal Elasticity Theory," *Composite Structures*, vol. 125, pp. 304-313, 2015.
- [7] N. Despotovic, "Stability and vibration of a nanoplate under body force using nonlocal elasticity theory," *Acta Mec*, vol. 229, p. 273-284, 2018.
- [8] J. N. Reddy and S. D. Pang, "Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes," *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, vol. 103, pp. 023511-1-16, 2008.
- [9] R. Aghababaei and J. Reddy, "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, pp. 277-289, 2009.
- [10] S. Hosseini-Hashemi, M. Zare and R. Nazemnezhad, "An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity," *Composite Structures*, vol. 100, p. 290-299, 2013.
- [11] R. Ansari, S. Sahmani and B. Arash, "Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets," *Physics Letters A*, vol. 375, pp. 53-62, 2010.
- [12] M. Nematzadeh, M. Eskandari-Ghadi and B. Navayi Neya, "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions," *the journal of strain analysis for engineering design*, vol. 46, no. 2, 2011.
- [13] M. Eeskindari-Ghadi, "A Complete Solution of the Wave Equations for Transversely Isotropic Media," *Journal of Elasticity*, vol. 81, pp. 1-19, 2005.
- [14] A. Bakhshandeh, B. Navayi Neya and P. Nateghi Babagi, "Benchmark solution for free vibration analysis of transversely isotropic thick rectangular plates," *Acta Mechanica*, vol. 228, pp. 3977-3995, 2017.
- [15] E. Abdollahzadeh Shahrababaki, "On three-dimensional nonlocal elasticity: Free vibration of rectangular nanoplate," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 71, pp. 122-133, 2018.
- [16] P. Nateghi-Babagi, B. Navayi Neya and M. Eeskindari-Ghadi, "Displacement potential functions for elastodynamic problems in transversely isotropic media based on nonlocal strain gradient theory," *Journal of sharif civil engineering*, vol. 37.2, no. 4.1, p. 57-67, 2022 (in persian).

