



ISAV2022

دوازدهمین کنفرانس بین المللی آگوستیک و ارتعاشات

۲۳ و ۲۴ آذر ماه ۱۴۰۱ تهران - ایران



تحلیل ارتعاش آزاد تیر مدرج محوری اویلر برنولی یکسرگردار با میرایی غیرویسکوز غیرمحلی به روش گالرکین

پریسا الیاسی^۱، بهرام نوائی-نیا^{۲*}، علی رحمانی فیروزجائی^۳

^۱ ایران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، مهندسی عمران، ۴۷۱۴۸۷۳۱۱۳، دانشجوی دکتری مهندسی سازه

^۲ ایران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ۴۷۱۴۸۷۳۱۱۳، استاد دانشکده مهندسی عمران

^۳ ایران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ۴۷۱۴۸۷۳۱۱۳، دانشیار دانشکده مهندسی عمران

* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: navayi@nit.ac.ir

چکیده

به کارگیری میرایی غیرمحلی در هنگام مدل سازی نیروهای پیرامونی در مجموعه‌ای از میراگرهای شبکه‌ای متصل به هم، بسیار کارآمد است و حتی در سیستم‌های بزرگ مقیاس موجب بهینه‌سازی ظرفیت میرایی می‌شود. محققان بسیاری برای جلوگیری از پیچیدگی‌های محاسباتی، مدل میرایی ویسکوز را در تحلیل دینامیکی سازه‌ها ملاک قرار داده‌اند، حال آن‌که مدل‌های متأثر از پارامترهای بیشتر، تطابق بهتری با نتایج آزمایشگاهی و پاسخ سازه‌های واقعی دارند. در مقاله حاضر، میرایی خارجی تیر اویلر برنولی مدرج محوری یکسرگردار با فرض وابستگی نیروهای استهلاکی به تاریخچه زمانی حرکت و تاثیرپذیری از اندرکنش‌های نقاط پیرامونی، به شکل انتگرال‌های همگشت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا، با اتکا به روش گالرکین و اعمال تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل انتگرالی حاکم بر محیط پیوسته، تبدیل به یک سیستم گسسته معادل با تعداد درجات آزادی محدود می‌شود. در ادامه، شکل مود تیر همگن نامیرای متناظر به عنوان تابع قیاسی، که شرایط مرزی نیرویی و هندسی را به خوبی اقناع می‌کند، در بسط راه‌حل آزمایشی معادله حرکت در نظر گرفته می‌شود. پس از تعیین ماتریس‌های سختی، جرم و میرایی سیستم نسبت به مختصات تعمیم‌یافته، مقدارهای ویژه مختلط و حقیقی با استفاده از دترمینان ماتریس سختی دینامیکی به دست می‌آیند که به ترتیب موده‌های الاستیک و غیرویسکوز را نشان می‌دهند. فرض می‌شود که خصوصیات مکانیکی و فیزیکی تیر مورد نظر در راستای محور طولی به صورت پیوسته و تدریجی بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند؛ که طی سال‌های اخیر به دلیل برتری نسبت به مواد همگن و یا مواد مرکب لایه‌ای، به شکل گسترده‌ای در صنایع خودروسازی و هوا و فضا مورد استفاده قرار گرفته‌است. نتایج عددی این مقاله با پاسخ‌های سایر مراجع در حالت خاص مقایسه شده‌است که انطباق بسیار خوبی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تیر مدرج محوری؛ میرایی غیرویسکوز غیرمحلّی؛ روش گالرکین؛ مقادارهای ویژه.

۱- مقدمه

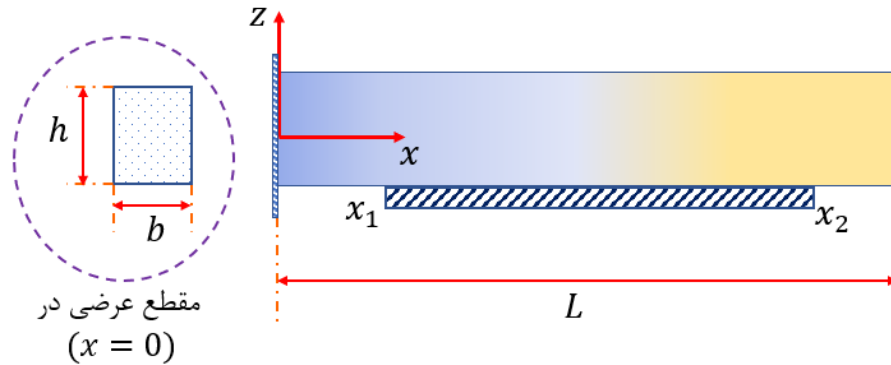
با استفاده از مدل‌های میرایی غیرمحلّی، می‌توان مقادارهای ویژه را در تیرها کنترل نمود تا ظرفیت میرایی بهینه شود [۱]. در مدل‌های میرایی غیرمحلّی، اثر اندرکنش نقاط مجاور با در نظر داشتن سرعت نسبی و یا میانگین وزنی میدان سرعت در حوزه مکان به‌صورت انتگرالی وارد معادلات حاکم و یا شرایط مرزی می‌شوند [۳،۲]. ممکن است استفاده از مفاهیم تئوری غیرمحلّی در بررسی سازه‌های بزرگ مقیاس، کمی غیرملموس به نظر آید. اما طی سال‌های اخیر، مدل‌سازی میرایی و بستر به‌صورت غیرمحلّی در محیط‌های پیوسته رایج شده‌است. به‌عنوان مثال، می‌توان به تئوری تیرهای کلاسیک اشاره نمود که از اثر بعد دوم در پاسخ‌ها نسبت به طولشان صرف‌نظر می‌شود. در چنین حالتی، در نظر گرفتن تئوری غیرمحلّی موجب انطباق بهتر پاسخ‌ها با نتایج آزمایشگاهی خواهد شد [۴]. ادهیکاری و همکاران^۱ [۵]، از نخستین محققانی بودند که مدل میرایی غیرویسکوز غیرمحلّی را برای تیر اویلر-برنولی همگن پیشنهاد دادند. ایشان با کمک توابع انتقال، راه‌حلی دقیق برای معادله دیفرانسیل انتگرالی حاکم ارائه کردند که تنها در مورد شرایط مرزی مشخصی کارآیی داشت. ضمن این‌که میرایی غیرویسکوز نسبت به میرایی ویسکوز پارامترهای بیشتری در بردارد و تطابق بهتری با پاسخ سازه‌های واقعی نشان می‌دهد. مدل‌سازی میرایی به‌صورت غیرویسکوز یا غیرویسکوز غیرمحلّی، در بررسی رفتار لایه‌های میراکننده^۲ ویسکوالاستیک و اتصال چسب در سیستم‌های مرکب به‌کار می‌رود. تعداد قابل توجهی از پژوهشگران، ارتعاش تیر همگن با میرایی غیرمحلّی یا میرایی غیرویسکوز غیرمحلّی را مورد بررسی قرار داده‌اند [۶-۸]، اما تا کنون تیرهای مدرج تابعی در این حیطه مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند. مواد مدرج تابعی، نوع نسبتاً جدیدی از مواد مرکب هستند که ویژگی‌های آن‌ها، تغییرات تدریجی و پیوسته‌ای در راستای یک یا چند محور دارد. مواد مدرج به دلیل مزایای بسیار نسبت به مواد همگن و یا سیستم‌های مرکب لایه‌ای، همچون تمرکز تنش کمتر در سطح مشترک دو لایه ناهم‌جنس، استحکام بالاتر و ویژگی‌های مناسب حرارتی، در صنایع خودروسازی و هوا و فضا به‌شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۹]. اغلب مطالعاتی که در زمینه مواد مدرج تابعی صورت گرفته‌است، بر روی سیستم‌هایی تمرکز کرده‌اند که خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مواد همچون چگالی و مدول یانگ در امتداد ضخامت درجه‌بندی شده‌اند [۱۰،۱۱]. مرور ادبیات فنی نشان می‌دهد که تعداد نسبتاً محدودی از محققان به بررسی تیرهای مدرج محوری پرداخته‌اند که خصوصیات آن‌ها در راستای طولی تغییر می‌کند [۱۲-۱۴]. تعیین پاسخ تیرهای مدرج محوری به دلیل ضرایب متغیر معادلات حاکم، امری دشوار و زمان‌بر است، به همین دلیل تا به امروز، مکانیزم استهلاک انرژی به ندرت در این سازه‌ها مورد بحث قرار گرفته‌است. بر اساس اطلاعات موجود، ارتعاش آزاد تیرهای مدرج محوری با میرایی غیرویسکوز غیرمحلّی تا کنون بررسی نشده است. بنابراین، با توجه به کاربردهای گسترده این مواد، در این مقاله مقادارهای ویژه تیر مدرج محوری اویلر برنولی یکسرگیردار میرا با کمک تبدیل لاپلاس و روش گالرکین به‌دست می‌آید. خصوصیات مواد (چگالی و مدول یانگ)، بر اساس قانون توانی در راستای طول تیر تغییر می‌کند. برای تعیین راه‌حل تقریبی، شکل مودهای غیرمیرای تیر اویلر برنولی به عنوان توابع قیاسی انتخاب می‌شوند تا شرایط مرزی حاکم را اقلان کنند و دقت مورد نیاز نیز تامین شود. پس از آن با انتگرال‌گیری از معادله متناظر در طول تیر و حداقل‌سازی مانده وزنی، ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی نسبت به مختصات تعمیم‌یافته مشخص می‌شوند. در نتیجه، می‌توان مقادارهای ویژه سیستم گسسته معادل را با حل معادله حاصل از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی دینامیکی سیستم به دست آورد.

¹ Adhikari et al.

² Damping patches

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

تیری با مقطع عرضی یکنواخت و متشکل از مواد مدرج محوری در دستگاه مختصات $oxyz$ همانند شکل (۱) در نظر بگیرید. طول دهانه تیر L و پهنا و ارتفاع آن به ترتیب b و h است. محدوده $x_1 \leq x \leq x_2$ بخشی از تیر اویلر برنولی است که میرایی غیرویسکوز غیرمحملی دارد.



شکل ۱. تیر مدرج محوری با لایه میراکننده.

در مقاله حاضر فرض می‌شود که خصوصیات مصالح تیر به صورت پیوسته بر اساس قانون توانی تغییر می‌کنند، بنابراین خصوصیات مکانیکی و فیزیکی مانند مدول یانگ $E(x)$ و چگالی $\rho(x)$ در امتداد محور طولی x مطابق رابطه (۱)، توزیع می‌شوند.

$$Y(x) = \begin{cases} Y_L \left(1 - \frac{e^{\left(\frac{\alpha x}{L} - 1\right)} - 1}{e^\alpha - 1} \right) + Y_R \left(\frac{e^{\left(\frac{\alpha x}{L} - 1\right)} - 1}{e^\alpha - 1} \right); & \alpha \neq 0 \\ Y_L \left(1 - \frac{x}{L} \right) + Y_R \left(\frac{x}{L} \right); & \alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن Y_L و Y_R به ترتیب خصوصیات مکانیکی و فیزیکی متناظر لبه‌های سمت راست و چپ تیر را نشان می‌دهد و α پارامتر بی‌بعد گرادیان است [۱۲]. معادله ارتعاش آزاد تیر اویلر برنولی با میرایی خارجی کلی به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود، که در آن، $I(x)$ ممان اینرسی، $A(x)$ سطح مقطع و $w(x,t)$ تغییر مکان عرضی تیر است.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + L_d \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right) = 0 \quad (2)$$

نیروی میرایی در مدل میرایی غیرویسکوز غیرمحملی به عنوان تعمیمی از میرایی ویسکوز، در هر نقطه از محیط، وابسته به سرعت نسبی ذرات مجاور در محدوده مشخص است. L_d اپراتور میرایی و $C_e(x, \xi, t - \tau)$ تابع کرنل میرایی خارجی است که باید نرخ اتلاف انرژی را غیرمنفی سازد. در رابطه (۳)، ξ مولفه طولی است که اندرکنش نقاط مجاور و اثرات دوربرد را وارد معادله می‌کند. علاوه بر این، مولفه τ برای در نظر گرفتن تاریخچه زمانی سرعت تعریف شده است [۵].

$$L_d \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^t C_e(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi \quad (3)$$

تابع کرنل میرایی خارجی مطابق رابطه (۴)، نسبت به متغیر مکان و زمان جدایی‌پذیر فرض می‌شود، که در آن $c(x - \xi)$ و $g(t - \tau)$ به ترتیب به عنوان تابع کرنل مکان و زمان معرفی می‌شوند.

$$C_e(x, \xi, t - \tau) = H(x)c(x - \xi)g(t - \tau) \quad (4)$$

که $H(x)$ نیز تابعی برای مشخص کردن محدوده میرایی غیرمحملی بوده و به صورت رابطه (۵)، ارائه می‌شود که در آن H_0 پارامتری ثابت است.

$$H(x) = \begin{cases} H_0, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (5)$$

کرنل مکان $c(x)$ باید به گونه‌ای نرمال شود که رابطه (۶) برقرار باشد [۷].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(x) dx = 1 \quad (6)$$

در مقاله حاضر، کلی‌ترین شکل تابع کرنل مورد مطالعه قرار می‌گیرد که بیانگر میرایی غیرویسکوز غیرمحملی است. کرنل مکان و زمان مطابق روابط (۷) و (۸) از نوع نمایی کاهشی انتخاب می‌شوند. در مسائل ویسکوالاستیک، کرنل زمان را تابع ارثی یا آسایش نیز می‌نامند.

$$c(x-\xi) = \frac{\alpha_d}{2} e^{-\alpha_d|x-\xi|} \quad (7)$$

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (8)$$

در روابط اخیر μ ثابت آسایش و α_d پارامتر مشخصه میرایی است که فاصله موثر در مدل میرایی غیرمحملی را توصیف می‌کند و هر چه مقدار کمتری داشته باشد، رفتار غیرمحملی در مصالح نمود بیشتری خواهد داشت [۶]. با میل کردن ثابت آسایش و پارامتر مشخص میرایی به سمت بی‌نهایت، مدل رفتاری به میرایی ویسکوز محلی نزدیک می‌شود، در میرایی ویسکوز تنها وابستگی به سرعت لحظه‌ای در محاسبات لحاظ می‌شود. شرایط مرزی تیر یکسرگیردار در رابطه (۹)، ارائه شده است [۱۵].

$$\begin{cases} w(0,t) = \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

شرایط اولیه نیز مطابق رابطه (۱۰) بیان می‌شود که در آن $w_0(x)$ و $v_0(x)$ به ترتیب مولفه تغییرمکان و سرعت در آغاز ارتعاش در نظر گرفته می‌شوند.

$$w(x,0) = w_0(x); \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = v_0(x) \quad (10)$$

۳- تعیین مقدارهای ویژه

با اعمال تبدیل لاپلاس بر معادله (۲)، رابطه (۱۱) در فضای لاپلاسی به دست می‌آید.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2 W(x,s)}{dx^2} \right) + s^2 \rho(x)A(x)W(x,s) + sG(s)H_0 \int_{x_1}^{x_2} c(x-\xi)W(\xi,s)d\xi = 0 \quad (11)$$

در رابطه اخیر، s متغیر لاپلاس و $W(x,s)$ تابع تغییرمکان عرضی در فضای تبدیل یافته است. $G(s)$ نیز تبدیل لاپلاس تابع کرنل زمان است که به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

$$G(s) = \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} e^{-st} dt = \frac{\mu}{\mu + s} \quad (12)$$

راه حل آزمایشی همانند رابطه (۱۳)، انتخاب می‌شود که در آن توابع قیاسی $\phi_j(x)$ و ضرایب مجهول هستند. با جای‌گذاری پاسخ آزمایشی در معادله (۱۱)، مانده وزنی به دست می‌آید. در روش گالرکین، معیار انتخاب ضرایب مجهول، حداقل شدن مقدار مانده است. در واقع، باید انتگرال حاصل ضرب مانده وزنی در توابع قیاسی انتخابی برابر صفر باشد [۱۵].

$$w_{trial}(x,s) = \sum_{i=1}^n q_j(s)\phi_j(x) \quad (13)$$

یکی از توابع قیاسی مناسب برای مساله مورد بررسی، شکل مود سازه همگن نامیرای متناظر است. با قرار دادن توابع قیاسی مورد نظر در پاسخ آزمایشی، رابطه (۱۴) به دست می آید که در آن شرایط مرزی به خوبی اکتان می شوند. ضریب $\sqrt{1/\rho_L AL}$ برای نرمال سازی مودها نسبت به ماتریس جرم در پاسخ آزمایشی ضرب می شود.

$$\left\{ \begin{aligned} w_{trial}(x, s) &= \sum_{i=1}^4 q_j(s) \sqrt{\frac{1}{\rho_L AL}} \left\{ \cosh \beta_j x - \cos \beta_j x - \frac{\cosh \beta_j L + \cos \beta_j L}{\sinh \beta_j L + \sin \beta_j L} (\sinh \beta_j x - \sin \beta_j x) \right\} \\ \beta_j L &= 1.8751, 4.6941, 7.8547, 10.9956 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

پس از جای گذاری راه حل آزمایشی در معادله (۱۱) و انتگرال گیری در طول تیر، بهتر است مرتبه اپراتورهای مشتق را کاهش داد و شکل ضعیف معادله را جایگزین کرد. در این صورت احتمال متناهی شدن مانده وزنی بیشتر می شود. معادله حاکم بر سیستم گسسته معادل با معرفی ماتریس های جرم \mathbf{M} ، سختی \mathbf{K} و میرایی \mathbf{C} در رابطه (۱۵) ارائه شده است.

$$[s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{G}(s) \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (15)$$

برای تعیین مقادیرهای ویژه تیر مدرج محوری، ریشه های معادله مشخصه که حاصل از دترمینان ماتریس سختی دینامیکی $[s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{G}(s) \mathbf{C} + \mathbf{K}]$ است، به دست می آیند. مرتبه چند جمله ای مشخصه $(m = 2n + p)$ از دو برابر تعداد جملات راه حل آزمایشی $(2n)$ بیشتر است. وجه تمایز سیستم میرای ویسکوز و غیرویسکوز نیز در تعداد ریشه های معادله مشخصه است. از میان m مقدار ویژه در سیستم غیرویسکوز، $(2n)$ مقدار ویژه زوج مختلط مزدوج و p مقدار حقیقی حاصل می شود. مقادیر ویژه مختلط، مودهای الاستیک با ماهیت نوسانی به وجود می آورند. اما بردارهای ویژه متناظر با مقادیر حقیقی از اثرات غیرویسکوز مکانیزم میرایی ناشی می شوند که ماهیت غیر نوسانی دارند [۱۶]. نتایج عددی در بخش بعدی ارائه شده اند. برای حل معادله مشخصه و استخراج نتایج عددی از کدنویسی در نرم افزار متلب استفاده شده است.

۴- نتایج عددی و صحت سنجی

به منظور صحت سنجی نتایج، ابتدا مشخصات تیر همگن و ایزوتروپ اویلر برنولی با میرایی غیرویسکوز غیرمحملی در جدول (۱) در نظر گرفته می شود. قابل ذکر است که در این حالت، پارامتر بی بعد گرادیان برابر صفر فرض می شود.

جدول ۱. مشخصات تیر اویلر برنولی با میرایی غیرویسکوز غیرمحملی

$\rho_L, \rho_R \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$E_L, E_R \text{ (GPa)}$	H_0	$b, h \text{ (m)}$	$x_1 \text{ (m)}$	$x_2 \text{ (m)}$	$L \text{ (m)}$	μ	α_d
۲۷۰۰	۷۰	۲	۰,۰۰۵	۰,۵	۱,۵	۲	۲۰	۵

با توجه به اطلاعات جدول (۱)، مقادیرهای ویژه تیر اویلر برنولی با کرنل زمان و مکان نمایی کاهشی در جدول (۲) ارائه و با پاسخ های تیر اویلر برنولی در مرجع [۶] قیاس شده است که انطباق خوبی نشان می دهد. همانطور که پیش تر هم گفته شد مودهای الاستیک به صورت زوج های مختلط مزدوج به دست می آیند. فرکانس طبیعی مود j ام نوسان تیر میرای اویلر برنولی نیز در این حالت از رابطه $|\omega_j| = \sqrt{\text{Re}^2(s_j) + \text{Im}^2(s_j)}$; $j = 1, \dots, n$ مشخص می شود.

جدول ۲. مقادیرهای ویژه تیر اویلر-برنولی همگن میرا و مقایسه با مرجع [۶]

شماره مود	تیر اویلر برنولی همگن	مرجع [۶]
۱	$-4.209365 \pm 8.010813i$	$-4.2092 \pm 8.0111i$
۲	$-1.584143 \pm 43.908038i$	$-1.5841 \pm 43.908i$
۳	$-0.136378 \pm 114.137650i$	$-0.13619 \pm 114.14i$
۴	$-0.020355 \pm 222.342116i$	$-0.020349 \pm 222.34i$

به منظور راستی آزمایی پاسخ های تیر مدرج محوری، فرض می شود مصالح تشکیل دهنده آن مطابق جدول (۳) از دو ماده آلومینیوم و زیرکونیا تشکیل شده است. در این حالت میرایی صفر در نظر گرفته می شود. فرکانس طبیعی بی بعد تیر مدرج محوری نامیرا $\omega_n = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E_L I}{\rho_L A}} \omega_0$ در جدول (۴) ارائه و با نتایج مراجع [۹] و [۱۲] مقایسه شده است (ω_0 ریشه معادله مشخصه است). حداکثر اختلاف پاسخ های به دست آمده در مقاله حاضر و مراجع مورد نظر ۰٫۲۹ درصد است که نشان می دهد راه حل آزمایشی حتی با وجود چهار جمله، دقت مورد نیاز را تامین می کند. از اطلاعات جدول (۴) می توان دریافت که علیرغم یکسان بودن مواد تشکیل دهنده تیر، تغییرات پارامتر بی بعد گرادیان نقش به سزایی در مقدار فرکانس های طبیعی دارد. برای مثال، فرکانس مود اول نوسان در دو حالت به میزان ۶٫۱۹ درصد تغییر می کند.

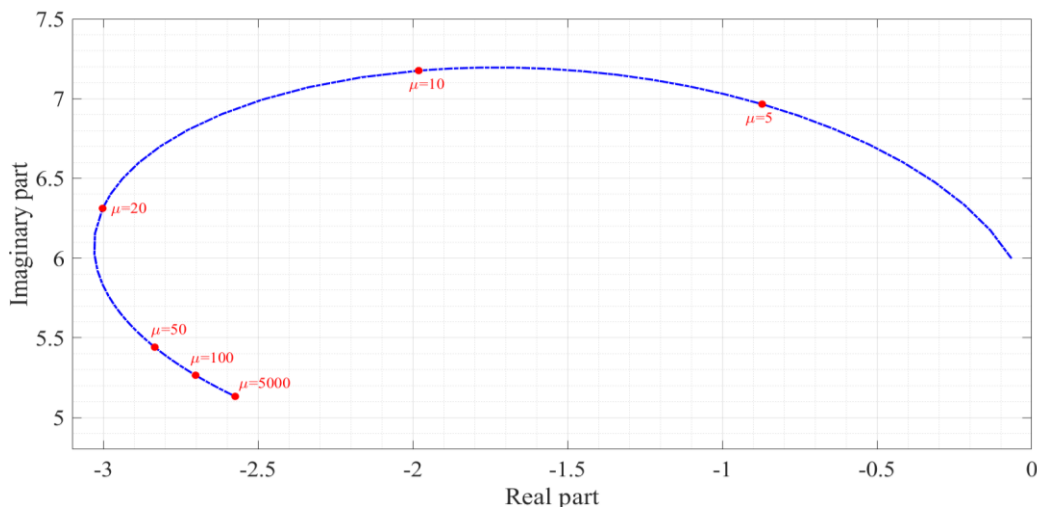
جدول ۳. مشخصات تیر اویلر-برنولی مدرج محوری با فرض گرادیان تابع توانی

مشخصات مصالح	زیرکونیا (انتهای راست تیر)	آلومینیوم (انتهای چپ تیر)
مدول یانگ (GPa)	۲۰۰	۷۰
جرم واحد حجم (kg/m^3)	۵۷۰۰	۲۷۰۲

جدول ۴. فرکانس های طبیعی بی بعد تیر اویلر-برنولی نامیرای مدرج محوری و قیاس با مراجع [۹] و [۱۲]

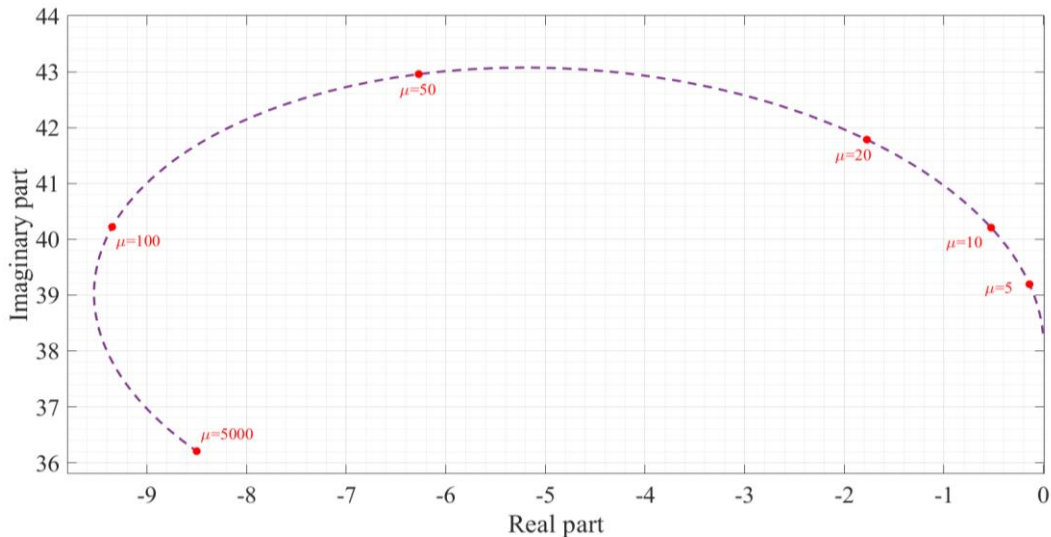
شماره مود	α	پژوهش حاضر	مراجع [۹]	مراجع [۱۲]
۱	۳	۲٫۸۵۴۴۵۸	۲٫۸۵۴۴	۲٫۸۶۳
۲		۲۱٫۴۱۵۵۱۵	-	۲۱٫۳۹۴
۳		۶۳٫۶۷۶۱۵۶	-	۶۳٫۷۱۲
۴		۱۲۷٫۷۴۵۶۹۹	-	۱۲۷٫۲۱۰
۱	۱۰	۳۰٫۴۳۰۹۳	۳۰٫۴۳۱	-
۲		۲۰٫۷۳۸۵۶۸	-	-
۳		۶۰٫۲۲۷۸۷۱	-	-
۴		۱۲۰٫۲۳۶۵۰۷	-	-

مکان هندسی مقدارهای ویژه اول و دوم تیر مدرج محوری با میرایی غیرویسکوز غیرمحلّی در برابر افزایش ثابت آسایش با انتخاب مدول یانگ و جرم حجمی از جدول (۳) و سایر مشخصات از جدول (۱) در شکل های (۲) و (۳) ارائه شده است. در این نمودارها α یا پارامتر بی بعد گرادیان برابر ۱۰ فرض شده است. با افزایش ضریب آسایش، رفتار استهلاکی تیر به میرایی ویسکوز نزدیک می شود.



شکل ۲. مکان هندسی مقدار ویژه اول در تیر مدرج محوری در برابر افزایش ثابت آسایش.

تغییرات مقادیر ویژه اول و دوم تیر مدرج محوری میرا در برابر افزایش ضرایب α و α_d نیز در جدول (۵) آمده است ($\mu=20$). با میل کردن پارامتر مشخصه میرایی به سمت بی‌نهایت، رفتار محلی نمود بیشتری پیدا می‌کند و مقادیرهای ویژه نیز بزرگ‌تر می‌شوند. در رفتار محلی، پاسخ سازه تنها به یک نقطه وابسته است و اندرکنش نقاط مجاور در نظر گرفته نمی‌شود. با افزایش بیست برابری ضریب α_d ، بخش حقیقی مقدار ویژه اول تیر مدرج محوری میرا به ازای α برابر با ۱، ۳ و ۱۰ به ترتیب ۱،۴۹، ۱،۵۴ و ۱،۵۵ برابر شده‌است. بخش موهومی نیز به دنبال تغییرات مشابه، به ترتیب ۱،۰۲، ۱،۰۳ و ۱،۱۲ برابر افزایش داشته‌است. روند این تغییرات با افزایش پارامتر مشخصه میرایی کندتر می‌شود.



شکل ۳. مکان هندسی مقدار ویژه دوم در تیر مدرج محوری در برابر افزایش ثابت آسایش.

جدول ۵. مقدار ویژه اول و دوم تیر مدرج محوری در برابر تغییرات ضریب α و α_d

شماره مود	α	α_d	۵	۲۰	۱۰۰
۱	۱	۱	$-2,226472 \pm 5,686411i$	$-3,061520 \pm 5,774730i$	$-2,235063 \pm 5,804274i$
۲			$-1,158634 \pm 42,997861i$	$-1,359058 \pm 43,465594i$	$-1,390663 \pm 43,539862i$
۱	۳	۳	$-2,441000 \pm 5,681228i$	$-3,415892 \pm 5,8207151i$	$-2,771346 \pm 5,883194i$
۲			$-1,414337 \pm 42,473985i$	$-1,651061 \pm 43,033744i$	$-1,688131 \pm 43,121805i$
۱	۱۰	۱۰	$-3,001702 \pm 6,311427i$	$-4,269854 \pm 6,834828i$	$-4,679910 \pm 7,101823i$
۲			$-1,772753 \pm 41,782525i$	$-2,059380 \pm 42,69368i$	$-2,104507 \pm 42,576851i$

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، برای نخستین بار، مقادیرهای ویژه تیر اویلر برنولی مدرج محوری با میرایی غیرویسکوز غیرمحلی، با استفاده از روش تقریبی گالرکین بر اساس بسط پاسخ‌های تیر همگن نامیرای متناظر به دست آمده است. بر مبنای این روش، با در نظر گرفتن درجات آزادی محدود، که همان ضرایب مجهول راه‌حل آزمایشی هستند، تیر اویلر برنولی تبدیل به یک سیستم گسسته می‌شود. در ادامه، با اعمال تبدیل لاپلاس و تعیین معادله مشخصه جبری حاصل از دترمینان ماتریس سختی دینامیکی سیستم، مقادیرهای ویژه الاستیک و غیرویسکوز به دست می‌آیند. مقایسه نتایج عددی با پاسخ‌های مراجع در حالت خاص، نشان می‌دهد که حتی با فرض چهار جمله در بسط راه‌حل آزمایشی، می‌توان به دقت مطلوبی دست یافت. نتایج حاصل از تحلیل تیر اویلر برنولی مدرج محوری میرا را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

- با افزایش ثابت آسایش، بخش حقیقی و موهومی مقادیرهای ویژه تیر، ابتدا روند افزایشی و سپس روند کاهش می‌کند. با میل کردن این ثابت به سمت بی‌نهایت، رفتار استهلاکی سیستم به میرایی ویسکوز نزدیک می‌شود.

- فرکانس طبیعی نوسان تیر، با افزایش مقدار پارامتر مشخصه میرایی، افزایش می‌یابد. هر چه αd بزرگ‌تر شود روند تغییرات فرکانس طبیعی کندتر خواهد بود.
 - با وجود یکسان بودن مواد تشکیل‌دهنده تیر، تغییر پارامتر بی‌بعد گرادیان بر فرکانس‌های طبیعی اثرگذار است.
- پاسخ سیستم‌ها در برابر بارهای دینامیکی اعمالی به میزان زیادی وابسته به چند فرکانس طبیعی اول نوسان است. هنگامی که فرکانس بار دینامیکی به یکی از فرکانس‌های طبیعی نزدیک باشد، پدیده تشدید به وقوع می‌پیوندد. به‌منظور طراحی بهینه و در جهت پیشگیری از ارتعاشات شدید، فرکانس طبیعی اول یا چند فرکانس کوچک‌تر را باید به شکلی تغییر داد که در محدوده فرکانس بارهای دینامیکی قرار نگیرند. با جابجایی میراکننده‌ها یا محل قرارگیری لایه میراکننده نیز می‌توان در فرکانس‌های طبیعی تغییراتی به‌وجود آورد تا طراحی بهینه شود. توجه به میرایی غیرویسکوز غیرمحل دستیابی به این هدف را تا حد زیادی تسهیل می‌کند.

مراجع

1. L. Munteanu, V. Chiroiu, D. Dumitriu, D. Baldovin, and C. Chiroiu, "On the Eigenfrequency Optimization of Euler-Bernoulli Beams with Nonlocal Damping Patches. ", *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Série de Mécanique Appliquée* 50, 53-66 (2009).
2. S. Yüksel, U. Dalli, "Longitudinally Vibrating Elastic Rods with Locally and Nonlocally Reacting Viscous Damper", *Shock & Vibration: IOS Press* 12, 109-118 (2005).
3. S. Adhikari, M. I. Friswell, and Y. Lei, "Modal Analysis of Non-viscously Damped Beams", *Journal of Applied Mechanics*, 74, 1026-1030 (2007).
4. P. D. Zhang, Y. J. Lei, and Z. B. Shen, "Semi-Analytical Solution for Vibration of Nonlocal Piezoelectric Kirchhoff Plates Resting on Viscoelastic Foundation", *Journal of Applied and Computational Mechanics* 4(3), 202-215 (2018).
5. S. Adhikari, Y. Lei, and M. I. Friswell, "Dynamics of Non-Viscously Damped Distributed Parameter Systems", *Structural Dynamics and Materials Conference*, Austin, Texas, USA, April 18-21 (2005).
6. Y. Lei, M. I. Friswell, and S. Adhikari, "A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping", *International Journal of Solids and Structures* 43, 3381-3400 (2006).
7. V. S. Fyodorov, V. N. Sidorov, and E. S. Shepitko, "Nonlocal damping consideration for the computer modeling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 456, 1-8 (2018).
8. C. Zhao, C. Zhao, and C. Zhong, "The Global Attractor for a Class of Extensible Beams with Nonlocal Weak Damping", *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B* 25(3), 935-955 (2020).
9. Y. Huang, X. F. Li, "A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section", *Journal of Shock and Vibration* 315, 2291-2303 (2010).
10. M. Avcar, H. H. A. Alwan, "Free vibration of functionally graded Rayleigh beam", *International Journal of Engineering and Applied Sciences* 2 (2), 127-137 (2017).
11. H. Arvin, S. M. H. Hosseini, and Y. Kiani, "Free vibration analysis of pre/post buckled rotating functionally graded beams subjected to uniform temperature rise", *Thin-Walled Structures* 158, 1-11 (2021), <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107187>.
12. D. Cao, Y. Gao, M. Yao, and W. Zhang, "Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method", *Engineering structures* 173, 442-448 (2018).
13. P. Datta, "Active vibration control of axially functionally graded cantilever beams by finite element method", *Materials Today* 44 (1), 2543-2550 (2021).
14. S. D. Akbas, "Moving-load dynamic analysis of AFG beams under thermal effect", *Steel and Composite Structures* 42 (5), 649-655 (2022).
15. S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, Second edition, New York, 2019.
16. S. Adhikari, *Damping Models for Structural Vibration*, A Dissertation Submitted to the University of Cambridge, Trinity College, 2000.