



ISAV2022

دوازدهمین کنفرانس بین المللی آگوستیک و ارتعاشات

تهران - ایران ۲۳ و ۲۴ آذر ماه ۱۴۰۱



ارایه یک معادله یکتا جهت بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری

کامیار حسینی هاشمی^{*}، روح الله طالبی توتی^ا، رضا ناظم نژاد^ب، شهریار حسینی هاشمی^ا

^ا ایران، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، کارشناسی مهندسی مکانیک

^ا ایران، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، دانشیار

^ب ایران، دامغان، میدان دانشجو، دانشگاه دامغان، دانشکده فنی و مهندسی، ۴۱۱۶۷-۳۶۷۱۶، دانشیار

^ا ایران، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، آزمایشگاه تحقیقاتی ضربه، ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، کارشناسی
ارشد مهندسی مکانیک؛

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: kamiar_hosseini@mecheng.iust.ac.ir

چکیده

در این پژوهش، یک معادله یکتا برای ارتعاشات آزاد تیرهای مدل شده بر اساس تئوری اویلر-برنولی ارایه شده است. معادله فوق قادر است ارتعاشات تیر با طیف وسیعی از شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک، و سطح مقطع یکنواخت و غیریکنواخت را پوشش نماید. همچنین، جنس تیر نیز می تواند همگن یا مدرج تابعی محوری باشد. روش استفاده شده برای استخراج معادله مشخصه فرکانسی، فرمول کوشی بصورت انتگرال گیری مکرر می باشد. به منظور صحت سنجی و دقت روابط ارایه شده، نتایج حاصل از روش ارایه شده در این پژوهش با نتایج سایر مراجع مقایسه شده است. همچنین، یکسری نتایج جدید برای تیر با سطح مقطع های متفاوت، جنس متفاوت و شرایط مرزی متفاوت ارایه شده است.

کلمات کلیدی: تیر اویلر-برنولی؛ فرمول کوشی؛ ارتعاشات آزاد.

مقدمه

تیرها به عنوان عناصر ساختاری نقش مهمی در بسیاری از شاخه های فناوری مدرن مربوط به هوافضا، مکانیک، دریایی، هسته ای و مهندسی عمران را ایفا می کنند. زیرا که می توان تمام یا قسمتی از یک سازه مهندسی مانند بدنه کشتی، فرودگاه های شناور، بازوهای ربات، پره های توربین، پل ها، تیرک میکروسکوپ های نیروی اتمی و غیره را کم و بیش بصورت تیر مدل کرد. بنابراین تیرها نقش

مهمی در خلق سیستم‌های مکانیکی، الکترو مکانیکی و ساختمانی دارند. ارتعاشات تیرها برای مهندسی‌هایی که این سیستم‌ها را طراحی می‌کنند از اهمیت فوق العاده برخوردار است زیرا که غالب این سیستم‌ها تحت تحریک دینامیکی قرار دارند. لذا تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشی برای تیرهای الاستیک با شرایط مرزی مختلف از جمله موارد پر اهمیت در طراحی اینگونه سیستم‌ها تلقی می‌گردد.

پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد انواع تیرها از لحاظ نوع جنس، نوع شرایط مرزی، و نوع سطح مقطع انجام گرفته است. به عنوان مثال، لاجمی و هیلر [۱] ارتعاش آزاد تیر اویلر-برنولی یک سرگیردار که حامل جرم در انتهای آزاد است را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها بعد از لحاظ کردن اثرات خروج از مرکز و ممان اینرسی جرم انتهایی در شرایط مرزی انتهای آزاد تیر، ریشه‌های معادله مشخصه را با استفاده از بسط سری‌های توانی محاسبه و فرکانس‌های طبیعی را تعیین نمودند. در پژوهش دیگری، لیو و همکاران [۲] مدل‌های ساده جدیدی برای مطالعه ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی مدرج تابعی اویلر-برنولی با استفاده از روش اسپلین نقطه‌ای محدود ایجاد کرده‌اند. همچنین، ژو و چونگ [۳] ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی ناقص با سطح مقطع متغیر مستطیلی شکل را با استفاده از روش انرژی رایلی-ریتز و بکارگیری توابع استاتیکی بعنوان توابع قابل قبول در روش رایلی-ریتز مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها سه پارامتر فرکانسی اول را برای سه نوع تیر سهمی وار ناقص با ارتفاع و پهنای متغیر را محاسبه و برای ترکیبی از شرایط مرزی کلاسیک طی جداولی بر حسب ضریب کوتاه شونده‌گی یا ناقصی مختلف ارائه داده‌اند. ساری و الداهیدی [۴] بر اساس نظریه تیر اویلر-برنولی، رفتار ارتعاشی چندگانه غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری را که بوسیله فنرهای انتقالی الاستیک به هم متصل شده‌اند مورد رسیدگی قرار داده‌اند. در این مطالعه، روش هم‌آمیزی طیفی چبیشف برای تبدیل معادلات دیفرانسیل حاکم به سیستم معادلات جبری استفاده شده است و سپس پارامترهای فرکانسی بدون بعد با حل مسئله مقدار ویژه بدست آمده‌اند.

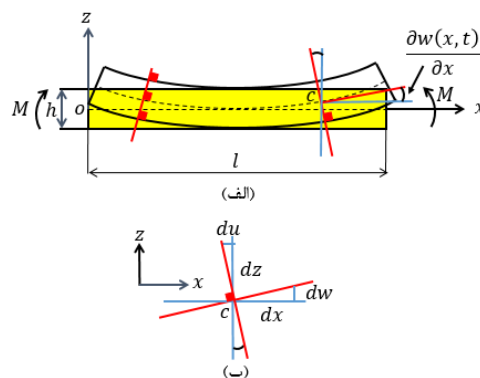
با مروری بر مراجع و یافتن خلاءهای پژوهشی در زمینه ارتعاشات آزاد تیرها، نویسندگان مقاله دو هدف زیر را که به نوعی نوآوری

این پژوهش نیز محسوب می‌شود مدنظر دارند:

- جهت حل مسئله یک روند جدید براساس فرمول کوشی برای انتگرال‌های مکرر مورد استفاده قرار خواهد گرفت که تاکنون بوسیله سایر محققین مورد استفاده قرار نگرفته است.
- مرور مطالعاتی بر ادبیات موضوع حاکی از این واقعیت است که غالب محققین در بررسی‌های خویش ابداع اجرام انتهایی و خروج از مرکز را لحاظ نکرده و روش‌های ارائه شده بوسیله آن‌ها قابلیت بررسی طیف متنوع و گوناگونی از پیکربندی‌های مختلف را ندارد. در حالی که روش ارائه شده در این پژوهش مدل‌های متنوعی با شرایط مرزی متفاوت و با هر ترکیبی از عوامل فنر انتقالی، فنر پیچشی، جرم صلب، جرم صلب با خارج از مرکزیت جرم، در دو انتهای تیر را پوشش می‌دهد. برای تمامی این مدل‌ها بکارگیری معادلات بدست آمده در این پژوهش، شرایط مرزی مطلوب را نه تنها برای تیر غیر یکنواخت، غیر هموزن و مدرج تابعی محوری بلکه برای تیر یکنواخت، هموزن و آیزوتروپیک بدست می‌دهند.

استنتاج معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی

تیری به طول l و ارتفاع h را مطابق شکل (۱) در نظر گرفته و مبدأ دستگاه مختصات (x, z) را در نقطه o انتهای سمت چپ تیر اختیار می‌کنیم. در این شکل M گشتاور خمشی، u و w به ترتیب مؤلفه‌های میدان جابجایی در راستای محورهای x و z هستند.



شکل ۱. تیر اویلر-برنولی (الف) قبل و (ب) بعد از تغییر شکل.

برای تیر اویلر-برنولی، مؤلفه‌های میدان جابجایی بصورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شوند:

$$u = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}; \quad v = 0; \quad w = w(x, t) \quad (۱)$$

با در نظر گرفتن میدان جابجایی داده شده و بدست آوردن مؤلفه‌های کرنش و تنش در تیر، و هم چنین در نظر گرفتن فرم‌های خطی و پیچشی و جرم در دو انتهای تیر، به همراه نیروی خارجی وارد بر تیر بصورت $p = p(x, t)$ با استفاده از اصل همپلتون، معادله حرکت (رابطه (۲)) و شرایط مرزی (روابط (۳)-(۶)) بدست می‌آیند:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} \right) - m(x) \omega^2 \tilde{w} - p = 0. \quad (۲)$$

$$D(0) \frac{d^2 \tilde{w}(0)}{dx^2} - K_{RL} \frac{d\tilde{w}(0)}{dx} + J_{OL} \omega^2 \frac{d\tilde{w}(0)}{dx} - M_L e_L \omega^2 \tilde{w}(0) = 0. \quad (۳)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[D(0) \frac{d^2 \tilde{w}(0)}{dx^2} \right] - K_{TL} \tilde{w}(0) + M_L \omega^2 \tilde{w}(0) - M_L e_L \omega^2 \left[\frac{d\tilde{w}(0)}{dx} \right] = 0. \quad (۴)$$

$$-D(L) \frac{d^2 \tilde{w}(L)}{dx^2} - K_{RR} \left[\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} \right] + J_{OR} \omega^2 \left[\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} \right] + M_R e_R \omega^2 \tilde{w}(L) = 0. \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dx} \left[D(L) \frac{d^2 \tilde{w}(L)}{dx^2} \right] - K_{TR} \tilde{w}(L) + M_R \omega^2 \tilde{w}(L) + M_R e_R \omega^2 \left[\frac{d\tilde{w}(L)}{dx} \right] = 0 \quad (۶)$$

که $w(x, t) = \tilde{w}(x) e^{i\omega t}$ ، ω فرکانس طبیعی تیر، $D(x) = E(x)I(x)$ ضریب خمشی، $I(x) = \int_A z^2 dA$ ممان اینرسی سطح مقطع تیر، $E(x)$ مدول الاستیسیته تیر، $m(x) = \rho(x)A(x)$ جرم بر واحد طول، θ_L و θ_R به ترتیب زاویه چرخش تار خنثی در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر، K_{RL} و K_{RL} سختی فنر پیچشی به ترتیب در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر، K_{TL} و K_{TL} سختی فنر خطی به ترتیب در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر، M_L و M_R مقدار جرم به ترتیب در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر، e_L و e_R خارج از مرکزیت مرکز جرم‌ها به ترتیب در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر، J_{OL} و J_{OR} ممان اینرسی جرم‌های به ترتیب در تکیه‌گاه سمت چپ و راست تیر می‌باشند.

به منظور بی‌بعدسازی معادله دیفرانسیل حرکت (رابطه (۲)) و معادلات شرایط مرزی (روابط (۳)-(۶)) از پارامترهای بی بعد طول و جابجایی به صورت روابط زیر استفاده می‌شود:

$$X = \frac{x}{l}, \quad \hat{w}(X) = \frac{\tilde{w}(x)}{l} \quad (۷)$$

که در نتیجه آن خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\frac{D(X)}{D(0)} \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \frac{m(X)}{m(0)} \hat{w}(X) - \frac{pL^3}{D(0)} = 0 \quad (۸)$$

$$\frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} - \hat{K}_{RL} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} + \beta^4 \hat{J}_{OL} \frac{d\hat{w}(0)}{dX} - \beta^4 \hat{M}_L \hat{e}_L \hat{w}(0) = 0 \quad (۹)$$

$$\gamma_0 \frac{d^2 \hat{w}(0)}{dX^2} + \frac{d^3 \hat{w}(0)}{dX^3} + \hat{K}_{TL} \hat{w}(0) - \hat{M}_L \beta^4 \hat{w}(0) + \hat{M}_L \hat{e}_L \beta^4 \frac{d\hat{w}(0)}{dX} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} + \hat{K}_{RR} \frac{d\hat{w}(1)}{dX} - \beta^4 \hat{J}_{OR} \lambda \frac{d\hat{w}(1)}{dX} - \beta^4 \hat{M}_R \hat{e}_R \lambda \hat{w}(1) = 0 \quad (۱۱)$$

$$\gamma \frac{d^2 \hat{w}(1)}{dX^2} + \frac{d^3 \hat{w}(1)}{dX^3} - \hat{K}_{TR} \hat{w}(1) + \hat{M}_R \beta^4 \lambda \hat{w}(1) + \hat{M}_R \hat{e}_R \beta^4 \lambda \frac{d\hat{w}(1)}{dX} = 0 \quad (۱۲)$$

که پارامترهای تعریف شده در روابط (۸)-(۱۲) عبارتند از:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 L^4 m(0)}{D(0)}$$

$$\hat{M}_L = \frac{M_L}{m(0)L}, \quad \hat{e}_L = \frac{e_L}{L}, \quad \hat{J}_{OL} = \frac{J_{OL}}{m(0)L^3}, \quad \hat{K}_{RL} = \frac{LK_{RL}}{D(0)}, \quad \hat{K}_{TL} = \frac{K_{TL}L^3}{D(0)}, \quad \gamma_0 = \frac{D'(0)}{D(0)}$$

$$\hat{K}_{TR} = \frac{K_{TR}L^3}{D(1)}, \quad \hat{J}_{OR} = \frac{J_{OR}}{m(0)L^3}, \quad \hat{M}_R = \frac{M_R}{m(0)L}, \quad \hat{e}_R = \frac{e_R}{L}, \quad \lambda = \frac{D(0)}{D(1)}, \quad \gamma = \frac{D'(1)}{D(1)}, \quad \hat{K}_{RR} = \frac{LK_{RR}}{D(1)}$$

در صورتیکه هدف، شبیه‌سازی شرایط مرزی کلاسیک باشد اطلاعات جدول (۱) می‌تواند مفید باشد.

جدول ۱. شبیه سازی شرایط مرزی کلاسیک

B C	\hat{K}_{RL}	\hat{K}_{TL}	\hat{M}_L	\hat{J}_{OL}	\hat{e}_L	\hat{K}_{RR}	\hat{K}_{TR}	\hat{M}_R	\hat{J}_{OR}	\hat{e}_R
C-C	10^{15}	10^{15}	0	0	0	10^{15}	10^{15}	0	0	0
C-S	10^{15}	10^{15}	0	0	0	10^{-15}	10^{15}	0	0	0
C-F	10^{15}	10^{15}	0	0	0	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0
C-G	10^{15}	10^{15}	0	0	0	10^{15}	10^{-15}	0	0	0
S-C	10^{-15}	10^{15}	0	0	0	10^{15}	10^{15}	0	0	0
S-S	10^{-15}	10^{15}	0	0	0	10^{-15}	10^{15}	0	0	0
S-F	10^{-15}	10^{15}	0	0	0	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0
S-G	10^{-15}	10^{15}	0	0	0	10^{15}	10^{-15}	0	0	0
F-C	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0	10^{15}	10^{15}	0	0	0
F-S	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0	10^{-15}	10^{15}	0	0	0
F-F	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0
F-G	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0	10^{15}	10^{-15}	0	0	0
G-C	10^{15}	10^{-15}	0	0	0	10^{15}	10^{15}	0	0	0
G-S	10^{15}	10^{-15}	0	0	0	10^{-15}	10^{15}	0	0	0
G-F	10^{15}	10^{-15}	0	0	0	10^{-15}	10^{-15}	0	0	0
G-G	10^{15}	10^{-15}	0	0	0	10^{15}	10^{-15}	0	0	0

که حروف C, S, F, G به ترتیب بر گیردار، ساده، آزاد و لغزشی دلالت دارند.

حل معادله دیفرانسیل حرکت

جهت بر رسی ارتعاشات آزاد با فرض $p = 0$ معادله دیفرانسیل بی بعد (رابطه (۸)) به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \eta(X) \hat{w}(X) = 0 \quad (13)$$

که در آن:

$$\mu(X) = \frac{D(X)}{D(0)}, \quad \eta(X) = \frac{m(X)}{m(0)}$$

به منظور حل معادله دیفرانسیل (۱۳)، از فرمول کوشی بصورت انتگرال گیری مکرر استفاده می‌شود. بر اساس این فرمول، چنانچه مشتق مرتبه n ام تابع $y(X)$ ، $f(X)$ باشد می‌توان با انتگرال گیری‌های مکرر، تابع $y(X)$ را با استفاده از یک انتگرال یگانه به صورت رابطه (۱۴) بدست آورد:

$$y(X) = \int_0^X \frac{(X-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

بنابراین، بر اساس فرمول کوشی، بعد از یک بار انتگرال گیری با به کارگیری فرمول کوشی، رابطه (۱۳) بصورت رابطه (۱۵) ارایه

می‌شود:

$$\frac{d}{dX} \left(\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} \right) - \beta^4 \int_0^X \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau = C_1 \quad (15)$$

با انتگرال گیری مجدد از طرفین معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} - \beta^4 \int_0^X (X-\tau) \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau = C_1 X + C_2 \quad (16)$$

جمله اول در طرف سمت چپ معادله (۱۶) را می‌توان به صورت رابطه (۱۷)

$$\mu(X) \frac{d^2 \hat{w}(X)}{dX^2} = \frac{d^2}{dX^2} [\hat{w}(X) \mu(X)] - 2 \frac{d}{dX} [\dot{\mu}(X) \hat{w}(X)] + \mu''(X) \hat{w}(X) \quad (17)$$

بازنویسی نمود. با جانشین کردن معادله (۱۷) در معادله (۱۶) و به کارگیری فرمول کوشی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} [\hat{w}(X) \mu(X)] - 2 \dot{\mu}(X) \hat{w}(X) + \int_0^X \mu''(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau - \frac{\beta^4}{2} \int_0^X (X-\tau)^2 \eta(\tau) \hat{w}(\tau) d\tau \\ = \frac{C_1}{2} X^2 + C_2 X + C_3 \end{aligned} \quad (18)$$

نهایتاً با انتگرال گیری مجدد از طرفین معادله (۱۸) رابطه (۱۹) بدست می آید:

$$\begin{aligned} \widehat{w}(X)\mu(X) - 2 \int_0^X \dot{\mu}(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau + \int_0^X (X-\tau)\mu''(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau - \frac{\beta^4}{6} \int_0^X (X-\tau)^3 \eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau \\ = \frac{C_1}{6}X^3 + \frac{C_2}{2}X^2 + C_3X + C_4 \end{aligned} \quad (19)$$

در روابط (۱۵)، (۱۶)، (۱۸) و (۱۹) ثوابت انتگرالی C_i ($i = 1, \dots, 4$) با استفاده از شرایط مرزی تعیین می گردند. با اعمال شرایط

مرزی (روابط (۹)-(۱۲)) رابطه ماتریسی (۲۰) بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= \widehat{G}_{1L}, & a_{14} &= \gamma_0 \widehat{G}_{1L} + \widehat{G}_{2L}, \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= -\gamma_0, & a_{23} &= \widehat{G}_{3L}, & a_{24} &= \gamma_0 \widehat{G}_{3L} + \widehat{G}_{4L}, \\ a_{31} &= 6 + \widehat{G}_{2R} \\ &+ (\gamma + 3)\widehat{G}_{1R}, & a_{32} &= 3[2 + \widehat{G}_{2R} \\ &+ \widehat{G}_{1R}(\gamma + 2)], & a_{33} &= 6[\widehat{G}_{1R}(\gamma + 1) + \widehat{G}_{2R}], & a_{34} &= 6(\gamma \widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R}), \\ a_{41} &= (\gamma + 3)\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R} \\ &- 6(\gamma - 1), & a_{42} &= 3[(\gamma + 2)\widehat{G}_{3R} \\ &+ \widehat{G}_{4R} - 2\gamma], & a_{43} &= 6[(\gamma + 1)\widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R}], & a_{44} &= 6(\gamma \widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R}) \end{aligned} \quad (21)$$

9

$$\begin{aligned} b_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, \\ b_3 &= (\gamma \widehat{G}_{1R} + \widehat{G}_{2R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\widehat{G}_{1R}B_5 + 2B_6) - 2\widehat{G}_{1R}B_4], \\ b_4 &= (\gamma \widehat{G}_{3R} + \widehat{G}_{4R})(6B_2 - 12B_1 - \beta^4 B_3) - 3[\beta^4(\widehat{G}_{3R}B_5 - 2\gamma B_6 + 2B_7) - 2\widehat{G}_{3R}B_4]. \end{aligned} \quad (22)$$

در رابطه (۲۲) پارمترهای B_i الی B_7 بصورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^1 \dot{\mu}(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau, & B_2 &= \int_0^1 (1-\tau)\mu''(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau, & B_3 &= \int_0^1 (1-\tau)^3 \eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau \\ B_4 &= \int_0^1 \mu''(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau, & B_5 &= \int_0^1 (1-\tau)^2 \eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau, & B_6 &= \int_0^1 (1-\tau)\eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau \\ B_7 &= \int_0^1 \eta(\tau)\widehat{w}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

اکنون با تعیین ثوابت انتگرالی C_i ($i = 1, \dots, 4$) و جایگذاری آنها در رابطه (۱۹)، سمت راست رابطه (۱۹) را می توان بصورت

رابطه (۲۴) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} V &= \frac{C_1}{6}X^3 + \frac{C_2}{2}X^2 + C_3X + C_4 \\ &= \frac{1}{6\zeta} [(A_1X^3 - 3A_3X^2 + 6A_5X - 6A_7)b_3 - (A_2X^3 - 3A_4X^2 + 6A_6X - 6A_8)b_4] \end{aligned} \quad (24)$$

که پارمترهای A_i ($i=1, \dots, 4$) عبارتند از:

$$\begin{aligned} A_1 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} & A_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} & A_3 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ A_4 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} & A_5 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} & A_6 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix} \\ A_7 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} & A_8 &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

با جایگذاری پارامترهای b_3 و b_4 ، و B_i ($i = 1 - 7$) در رابطه (۲۴)، و قرار دادن نتیجه در رابطه (۱۹)، رابطه (۲۶) حاصل می‌شود:

$$\hat{w}(X)\mu(X) - \int_0^1 R_1(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \hat{w}(\tau) d\tau = 0 \quad (26)$$

که

$$R_1(X, \tau) = \frac{1}{12} \{ [12\dot{\mu}(\tau) - 6(1-\tau)\mu''(\tau) + \beta^4(1-\tau)^3\eta(\tau)]h_1(X) + [12\mu''(\tau) - 6\beta^4(1-\tau)^2\eta(\tau)]h_2(X) + 12h_3(X)(1-\tau)\eta(\tau) + 12h_4(X)\eta(\tau) \} \quad (27)$$

$$R_2(X, \tau) = [(X-\tau)\mu''(\tau) - 2\dot{\mu}(\tau)]; \quad R_3(X, \tau) = -\frac{\beta^4}{6}(X-\tau)^3\eta(\tau)$$

و

$$h_1(X) = \frac{2}{\zeta} \{ [(\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_2 - (\gamma\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_1]X^3 + 3[(\gamma\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_3 - (\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_4]X^2 + 6[(\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_6 - (\gamma\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_5]X + 6[(\gamma\hat{G}_{1R} + \hat{G}_{2R})A_7 - (\gamma\hat{G}_{3R} + \hat{G}_{4R})A_8] \} \quad (28)$$

$$h_2(X) = \frac{1}{\zeta} \{ [(\hat{G}_{1R}A_1 - \hat{G}_{3R}A_2)X^3 + 3(\hat{G}_{3R}A_4 - \hat{G}_{1R}A_3)X^2 + 6(\hat{G}_{1R}A_5 - \hat{G}_{3R}A_6)X + 6(\hat{G}_{3R}A_8 - \hat{G}_{1R}A_7) \} \quad (28)$$

$$h_3(X) = \frac{\beta^4}{\zeta} [- (A_1 + A_2\gamma)X^3 + 3(A_3 + A_4\gamma)X^2 - 6(A_5 + A_6\gamma)X + 6(A_7 + \gamma A_8)]$$

$$h_3(X) = \frac{\beta^4}{\zeta} [- (A_1 + A_2\gamma)X^3 + 3(A_3 + A_4\gamma)X^2 - 6(A_5 + A_6\gamma)X + 6(A_7 + \gamma A_8)]$$

در این مرحله، برای استخراج فرکانس‌های بی‌بعد و شکل مودهای بی‌بعد، از بسط $\hat{w}(X)$ به صورت سری توانی (رابطه (۲۹)) استفاده می‌شود:

$$\hat{w}(X) = \sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} X^{n-1} \quad (29)$$

که در آن، g_{n-1} ضرایب نامشخصی هستند که می‌باید تعیین گردند و NN یک عدد صحیح می‌باشد. با جانشین کردن رابطه (۲۹) در رابطه (۲۶)، ضرب کردن آن در عبارت $X^M dX$ ، و انتگرالگیری در فاصله $X = 0$ تا $X = 1$ ، رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$\int_0^1 X^M dX \left[\sum_{n=1}^{NN} g_{n-1} \left(\mu(X) X^{n-1} - \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau + \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right) \right] = 0 \quad (30)$$

با به کارگیری معادله (۳۰) برای مقادیر صحیح $M = 1$ الی $M = NN - 1$ تعداد NN معادله خطی جبری استنتاج می‌گردد

که شکل ماتریسی این معادلات به صورت رابطه (۳۱) می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0n} \\ S_{10} & S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{Mn-1} & S_{Mn-1} & \vdots & S_{Mn-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، پارامترهای S_{Mn-1} عبارتند از:

$$S_{Mn-1} = \sum_{M=0}^{NN-1} \sum_{n=1}^{NN} \mathcal{A}_{Mn-1} + \mathcal{Q}_{Mn-1} + \mathcal{U}_{Mn-1} + \mathcal{K}_{Mn-1} \quad (32)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{Mn-1} &= \int_0^1 \mu(X) X^{n-1+M} dX \\ \mathcal{Q}_{Mn-1} &= - \int_0^1 X^M dX \int_0^1 R_1(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = - \int_0^1 \mathcal{B}_{n-1} X^M dX \\ \mathcal{U}_{Mn-1} &= \int_0^1 X^M dX \int_0^X R_2(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{D}_{n-1} X^M dX \\ \mathcal{K}_{Mn-1} &= \int_0^1 X^M dX \left(-\frac{\beta^4}{6} \right) \int_0^X R_3(X, \tau) \tau^{n-1} d\tau = \int_0^1 \mathcal{F}_{n-1} X^M dX \end{aligned} \quad (33)$$

می‌باشند. جهت تعیین جواب‌های غیر صفر برای ضرایب g_{n-1} ($n = 1$ الی $n = NN$) در معادله ماتریسی (۳۱)، دترمینان ماتریس ضرایب باید برابر صفر قرار داده شود. در نتیجه معادله مشخصه فرکانسی بر حسب فرکانس بی بعد β با بسط دترمینان نتیجه می‌گردد. همچنین با تعیین ضرایب g_{n-1} بر حسب g_0 ، شکل مدهای ارتعاشی از رابطه (۲۹) استنتاج می‌شوند.

۴- همگرایی

به منظور بررسی همگرایی روش پیشنهادی، پارامترهای فرکانسی را برای ارتعاشات تیر همگن و یکنواخت یکسر گیردار با در نظر گرفتن مقادیر مختلف NN و با استفاده از معادله (۳۱) محاسبه می‌کنیم، نتایج بدست آمده برای چهار پارامتر فرکانسی اول همراه با پارامترهای فرکانسی دقیق در جدول (۲) ارائه شده است. بررسی این جدول نشانگر این مطلب است که نتایج عددی همگرایی سریع دارند. با افزایش NN از ۳ به ۷، نتایج عددی دو فرکانس اول با نتایج حل دقیق تا چهار رقم اعشار مطابقت دارند. که نشان می‌دهد رویکرد حاضر بسیار کارآمد است. با این حال، دقت نتایج با افزایش شماره مدهای ارتعاش کاهش می‌یابد. برای فرکانس چهارم، نتیجه عددی با $NN = 7$ حدود 0.09 درصد از مقدار حل دقیق انحراف دارد. با این حال، اگر $NN = 11$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که نتایج عددی و دقیق تا چهار رقم اعشار مطابقت دارند. در نتیجه، دقت بالاتری را می‌توان از طریق افزایش NN به دست آورد. در جدول (۳) همگرایی سه پارامتر فرکانسی اول برای همین تیر با استفاده از روش اسپلاین نقطه ای محدود مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که در این جدول ملاحظه می‌شود چنانچه $NN = 21$ انتخاب گردد چهار فرکانس اول تیر به سمت مقادیر حل دقیق میل می‌کنند در نتیجه جهت حل مسیله مقدار ویژه و تعیین چهار پارامتر فرکانسی اول ضروریست که ریشه‌های یک دترمینان به ابعاد 21×21 تعیین گردند. بنابراین روش اسپلاین نقطه ای محدود در مقایسه با روش مطالعه حاضر زمان گیر ترو کم کارآمدتر می‌باشد. بعلاوه از مقایسه نتایج ارائه شده در جداول (۲) و (۳) ملاحظه می‌گردد که مقادیر پارامترهای فرکانسی استنتاج شده از طریق روش مطالعه حاضر به مقادیر حل دقیق نزدیک‌ترند که خود بر دقت بالای این روش دلالت دارد.

جدول ۲. همگرایی پنج پارامتر فرکانسی اول بر حسب NN برای تیر همگن یکنواخت با شرایط مرزی یکسر گیردار

شماره مود	دقیق	$NN = 3$	$NN = 5$	$NN = 7$	$NN = 11$
1	1.87510	1.87539	1.87510	1.87510	1.87510
2	4.69409	4.71523	4.69416	4.69409	4.69409
3	7.85476	10.8694	7.95234	7.85590	7.85476
4	10.9955	-	11.3366	11.0054	10.9955

جدول ۳. همگرایی پنج پارامتر فرکانسی اول بر حسب NN برای تیر همگن یکنواخت با شرایط مرزی یکسر گیردار

با استفاده از روش اسپلاین نقطه‌ای محدود					
شماره مود	دقیق	$NN = 6$	$NN = 11$	$NN = 16$	$NN = 21$
1	1.87510	1.87510	1.87510	1.87510	1.87510
2	4.69409	4.69564	4.69415	4.69415	4.69415
3	7.85476	7.88099	7.85595	7.85500	7.85481
4	10.9955	11.1591	11.0028	10.9968	10.9959

۵- تحلیل آباکوس

به منظور بررسی مزیت روش مطالعه حاضر در مقایسه با سایر روش‌های حل، مناسب دیده شد که این نتایج با نتایج حاصل از المان محدود نیز مقایسه شوند. بدین منظور تحلیل پارامترهای فرکانسی از طریق شبیه سازی در نرم افزار آباکوس مورد توجه قرار گرفت. برای تیر یکنواخت و همگن با شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیر دار آزاد پنج پارامتر فرکانسی اول بر اساس روش مطالعه حاضر در جدول (۴) ارائه و با نتایج المان محدود مقایسه شده اند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج از توافق بسیار خوبی برخوردارند. با افزایش شماره مودهای ارتعاش از یک الی چهار، خطاهای مابین نتایج محاسبه شده از طریق المان محدود و نتایج حاصل از به کار گیری روش مطالعه حاضر افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای تیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار خطاهای حاصل از مقایسه نتایج حاصل از دو روش به ترتیب برای مدهای اول تا چهارم عبارتند از 0.31، 0.42، 0.56 و 0.75 بنا براین از آن جاییکه نتایج حاصل از روش مطالعه

حاضر با نتایج حل دقیق تا چهار رقم اعشارمطابقت دارند می توان بار دیگر نتیجه گیری کرد که روش پیشنهادی در این مقاله از دقت بسیار بالا برخوردار بوده و بر سایر روش ها از جمله المان محدود مزیت دارد.

جدول ۴. مقایسه نتایج مطالعه حاضر و المان محدود برای تیر همگن یکنواخت

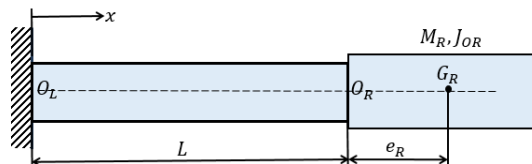
شرایط مرزی	روش	β_1	β_2	β_3	β_4
گیردار-گیردار	مطالعه حاضر	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372
	المان محدود	4.71538	7.82029	10.9334	14.0312
	حل دقیق	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372
گیردار-آزاد	مطالعه حاضر	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955
	آباکوس	1.87046	4.67976	7.82348	10.9369
	حل دقیق	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955

۶- نتایج

مقایسه نتایج و صحت سنجی

در این قسمت، برای صحت سنجی روابط استخراج شده، مقایسه‌ای بین نتایج روش حاضر و نتایج ارایه شده در مراجع انجام می‌گیرد. با توجه به گستردگی نتایج ارایه شده در مراجع به دلیل وجود حالت‌های بسیار متنوعی که برای ارتعاشات تیرها وجود دارد چندین نمونه مقایسه انجام خواهد شد.

در مثال اول، تیر یکنواختی مطابق شکل (۲) که در انتهای سمت چپ، گیردار و در انتهای سمت راست، حامل جرم با خروج از مرکز e_R و ممان اینرسی جرمی J_{OR} است در نظر گرفته شده است. پنج پارامتر فرکانسی اول محاسبه شده بر اساس روش مطالعه حاضر و روش حل دقیق [۱] در جدول (۵) ارایه شده است.



شکل ۲. تیر یکنواخت با شرایط مرزی گیردار در انتهای سمت چپ و غیر کلاسیک در سمت راست.

جدول ۵ پنج پارامتر فرکانسی اول محاسبه شده بر اساس روش مطالعه حاضر و روش حل دقیق

$$\hat{M}_R = 1, \hat{e}_R = 0.1, \hat{J}_{OR} = 0.06$$

β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	روش
11.1361	8.07401	5.1815	2.8875	1.15571	مطالعه حاضر
11.1361	8.07401	5.1815	2.8875	1.15571	حل دقیق
11.1361	8.0740	5.1815	2.8875	1.15570	مرجع [۱]

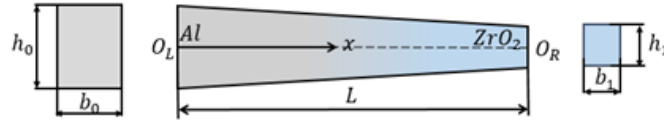
در مثال دوم، مقایسه‌ای برای تیر غیریکنواخت مدرج تابعی (شکل (۳)) که مدول الاستیسیته و چگالی آن بصورت روابط (۳۴) و (۳۵) در نظر گرفته شده است انجام گرفته است (جدول (۷)). همچنین خواص دو طرف تیر بصورت داده‌های جدول (۶) در نظر گرفته شده است.

$$E(X) = E_L + (E_R - E_L) \left(\frac{e^{\bar{\alpha}X} - 1}{e^{\bar{\alpha}} - 1} \right) \quad \bar{\alpha} \neq 0 \quad (34)$$

$$\rho(X) = \rho_L + (\rho_R - \rho_L) \left(\frac{e^{\bar{\alpha}X} - 1}{e^{\bar{\alpha}} - 1} \right) \quad \bar{\alpha} \neq 0 \quad (35)$$

جدول ۶ خواص دو ماده تشکیل دهنده تیر مدرج تابعی محوری

ماده	جرم مخصوص	مدول الاستیسیته
آلومینیم	$\rho_{Al} = 2702 \text{ kg/m}^3$	$E_{Al} = 70 \text{ GPa}$
زیرکونیم	$\rho_{Zr} = 5700 \text{ kg/m}^3$	$E_{Zr} = 200 \text{ GPa}$



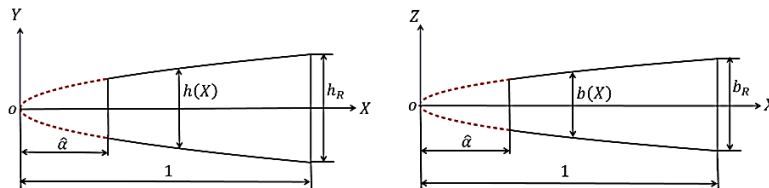
شکل ۳. مدل تیر مدرج تابعی محوری، آلومینیم غنی در سمت چپ و زیرکونیم غنی در سمت راست.

جدول ۷. مقایسه مجذور سه پارامتر فرکانسی اول، برای تیر مدرج تابعی محوری با شرایط $c_b = c_h = 0.2, \bar{\alpha} = -10$.

شرایط مرزی	روش	β_1^2	β_2^2	β_3^2
گیردار-گیردار	روش حاضر	21.5185	61.0548	121.6450
	مرجع [۲]	21.5207	61.0451	121.4017
ساده-ساده	روش حاضر	10.2634	41.0828	92.2188
	مرجع [۲]	10.2635	41.0849	92.2393

در مثال سوم، مجذور سه پارامتر فرکانسی اول استخراج شده بر اساس روش مطالعه حاضر برای تیر سهمی وار هموزن ناقص

(شکل (۴)) با نتایج مرجع [۳] مورد مقایسه قرار گرفته‌اند (جدول (۸)).



شکل ۴. مقاطع $X-Z$ و $X-Y$ تیر سهمی گون همگن ناقص.

در شکل (۴) ارتفاع و پهنای تیر به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) در نظر گرفته شده‌اند:

$$h(X) = h_R \sqrt{(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}} \quad (36)$$

$$b(X) = b_R \sqrt{(1 - \hat{\alpha})X + \hat{\alpha}} \quad (37)$$

جدول ۸. مقایسه مجذور سه فرکانس اول برای تیر سهمی وار هموزن ناقص

شرایط مرزی	روش	$\hat{\alpha} = 0.8$			$\hat{\alpha} = 0.4$		
		β_3^2	β_2^2	β_1^2	β_3^2	β_2^2	β_1^2
گیردار-گیردار	روش حاضر	114.533	58.4165	21.1860	98.8521	50.3249	18.1748
	[۳]	114.540	58.4170	21.1860	98.8550	50.3250	18.1750
گیردار-ساده	روش حاضر	98.4547	47.0234	14.2685	84.3271	39.8314	11.4137
	[۳]	98.4560	47.0230	14.2690	84.3280	39.8310	11.4140
گیردار-آزاد	روش حاضر	57.8433	20.2309	3.00257	48.5889	15.8985	1.8578
	[۳]	57.8430	20.2310	3.00260	48.5890	15.8990	1.8578

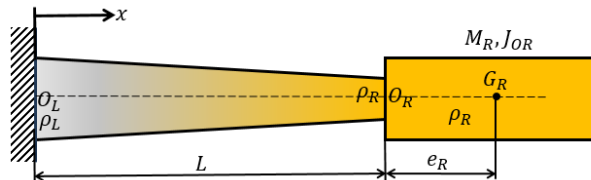
همان طور که در جداول (۵)، (۷) و (۸) مشاهده می‌شود نتایج استخراج شده با استفاده از روش حاضر به نتایج گزارش شده در

مراجع بسیار نزدیک است. این امر نشان دهنده صحت و دقت روش ارائه شده در این پژوهش و قابلیت استفاده از آن برای طیف وسیعی از مسایل ارتعاشات تیرها می‌باشد.

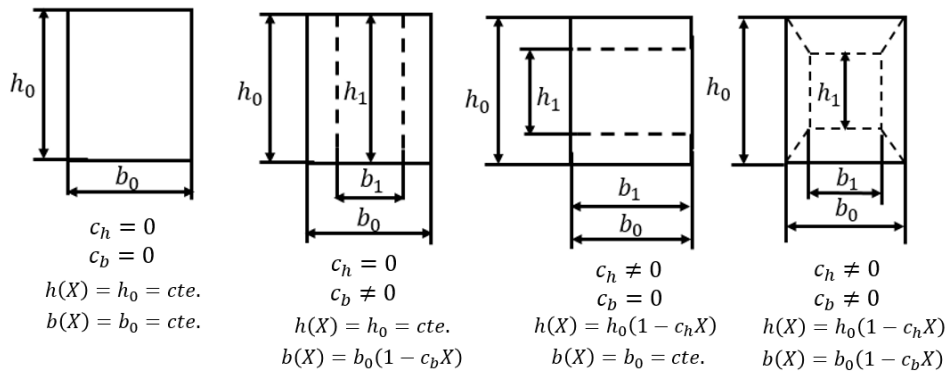
ارایه نتایج جدید

پس از تایید صحت و دقت روش حاضر، در این قسمت، تعدادی نتایج جدید برای حالت‌های خاص ارتعاشات تیرها با جنس و شرایط مرزی مختلف، ارایه می‌شود.

در شکل (۵)، تیر مدرج تابعی غیریکنواخت مخروطی نشان داده شده است. برای دو سر تیر مخروطی، چهار حالت در نظر گرفته شده است (شکل (۶)). همچنین مشخصات جرم انتهای سمت راست تیر، مطابق جدول (۹) اختیار شده است.



شکل ۵. تیر مدرج تابعی محوری غیر یکنواخت با شرایط مرزی گیردار در انتهای سمت چپ و حامل جرم با خروج از مرکز و ممان اینرسی جرمی در انتهای سمت راست



شکل ۶. نما از پهلو برای مدل تیر مدرج تابعی محوری در چهار حالت مختلف c_b و c_h .

جدول ۹. مشخصات جرم انتهای سمت راست تیر

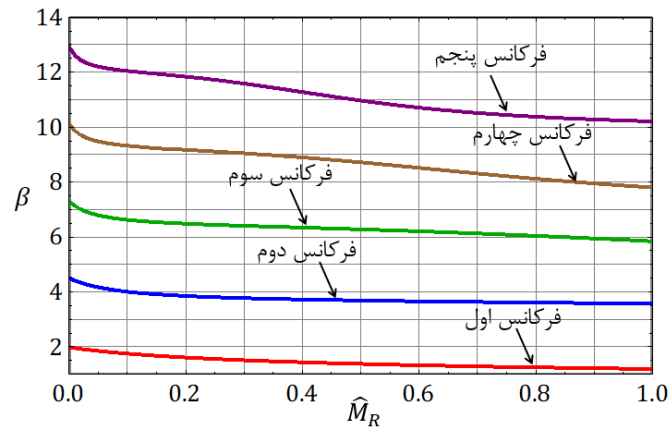
\bar{M}_R	\hat{e}_R	δ_R	\hat{a}_R
0.1	0.0125	0.5	0.025

جدول ۱۰. پنج فرکانس اول بی بعد تیر غیریکنواخت و مدرج تابعی محوری

در $x = 0 : L = 1m, \bar{A} = 6 \times 10^{-4}, \bar{K}_{TL} = \bar{K}_{RL} = 10^{15}$

c_h	c_b	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0.0	0.0	1.49962	4.16801	7.18768	10.1343	13.0683
0.0	0.2	1.54309	4.18548	7.16950	10.0997	13.0232
0.2	0.0	1.51188	3.99537	6.79256	9.55321	12.3109
0.2	0.8	1.75073	4.00653	6.62214	9.32166	12.0456

در شکل (۷) اثر تغییرات جرم انتهای بر روی پارامترهای فرکانسی تیر نشان داده شده در شکل (۵) نمایش داده شده است. نتایج به ازای ثابت نگه داشتن خروج از مرکز و برای حالت $c_h = 0.2, c_b = 0.8, \delta_R = 0.5, \rho_R = 3\rho_L$ همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش \bar{M}_R پارامترهای فرکانسی کاهش می‌یابند. این مشاهده با توجه به این نکته که مجذور فرکانس برای یک سیستم یک درجه آزادی بطور معکوس با جرم متناسب می‌باشد توجیه پذیر است.



شکل ۷. تغییرات پنج فرکانس اول بر حسب \hat{M}_R ($\hat{K}_{RL} = \hat{K}_{TL} = 10^{15}$, $\hat{e}_R = 0.0125$, $\hat{A} = 0.0006$).

نتیجه گیری

در این پژوهش، یک معادله یکتا برای ارتعاشات آزاد تیرهای مدل شده بر اساس تئوری اویلر-برنولی با استفاده از فرمول کوشی بر اساس انتگرال گیری مکرر ارایه شده است. معادله فوق قادر است ارتعاشات تیر با طیف وسیعی از شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک، و سطح مقطع یکنواخت و غیر یکنواخت را پوشش نماید. همچنین، جنس تیر نیز می تواند همگن یا مدرج تابعی محوری باشد. مقایسه نتایج نشان داد که روش ارایه شده، دقت بسیار خوبی در مقایسه با سایر روش های مورد استفاده توسط پژوهشگران دارد. بنابراین روش ارایه شده در این پژوهش می تواند به عنوان یک مرجع مناسب برای بررسی رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی با جنس، سزح مقطع و شرایط مرزی متفاوت باشد.

مراجع

1. S.A. Mousaavi Lajimi, G.R. Heppler, "Comment on natural frequencies of a uniform cantilever with a tip mass slender in the axial direction", *Journal of Sound and Vibration*, 331, 2964-2968 (2012).
2. P. Liu, K. Lin, H. Liu, and R. Qin, "Free Transverse Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Euler-Bernoulli Beams through Spline Finite Point Method", *Shock and Vibration*, 2016, 1-23 (2016).
3. D. Zhou, Y.K. Cheung, "The free vibration of a type of tapered beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 203-216 (2000).
4. M. S. Sari, S.Al-Dahidi, "Vibration characteristic of multiple functionally graded non uniform beams", *Journal of Vibration Control*, 10, 2205-2218 (2020).