



# ISAV2022

## دوازدهمین کنفرانس بین‌المللی آگوستیک و ارتعاشات

۲۳ و ۲۴ آذر ماه ۱۴۰۱ تهران - ایران



## شناسایی مشخصات دینامیکی یاتاقان‌های غلطکی

اصغر نجفی<sup>\*</sup>

ایران، تهران، شهرک قدس انتهای خیابان دادمان، پژوهشگاه نیرو، گروه تجهیزات دوار مکانیکی، ۱۴۶۸۶۱۳۱۱۳، استادیار

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [anajafi@nri.ac.ir](mailto:anajafi@nri.ac.ir)

### چکیده

در این مقاله با استفاده از تئوری روغن کاری الاستوهیدرودینامیک برای یاتاقان‌های غلطکی مشخصات دینامیکی استخراج شده است. منظور از مشخصات دینامیکی سختی و میرایی معادل می‌باشد. از این مشخصات برای تحلیل‌های روتور دینامیک و محاسبات ارتعاشات آن‌ها استفاده می‌شود. روغن کاری الاستوهیدرودینامیک به بررسی رفتار لایه روغن بین اجزای متحرک سیستم‌های دوار مکانیکی می‌پردازد. شکل لایه روغن به وسیله هندسه اجزای در تماس و ویژگی‌های روغن تعیین می‌شود. اگر فشار اعمالی در داخل لایه روغن به اندازه کافی بزرگ باشد تغییر شکل ناشی از تماس اجزا الاستیک خواهد بود و بر شکل لایه روغن اثر می‌گذارد. از آنجاکه شکل لایه روغن در این حالت به تغییر شکل الاستیک سطوح در تماس وابسته است برای بررسی ضخامت لایه روغن و توزیع فشار متناظر، بررسی مکانیک تماس بین سطوح و تغییر شکل الاستیک آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. در مقاله پیش رو با تقسیم‌بندی نوع تماس به دو حالت خطی و نقطه‌ای معادلات متناظر ضخامت روغن به کمک معادله رینولدز محاسبه و توزیع فشار متناظر به دست می‌آید. با استفاده از نمودارهای بی بعد و روشهای محاسباتی نرم افزاری جهت محاسبه سختی و میرایی معادل ارائه شده است.

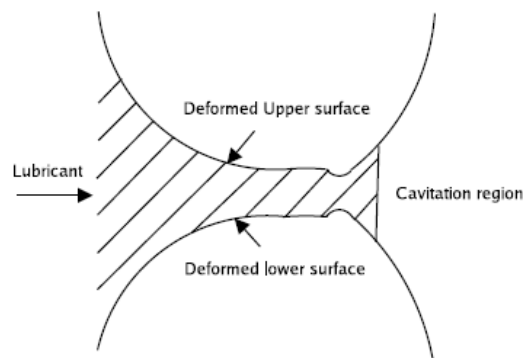
**کلمات کلیدی:** الاستوهیدرودینامیک؛ یاتاقان غلطکی؛ میرایی؛ معادله رینولدز

### ۱- مقدمه

یاتاقان‌ها وسایلی هستند که اجازه حرکت نسبی (عموما چرخشی) بین دو سطح در تماس را می‌دهند. یاتاقان‌ها به طور گسترده در تجهیزات دوار مورد استفاده قرار می‌گیرند. این اجزا باعث تسهیل در حرکت دورانی و استحکام سیستم‌های انتقال قدرت می‌شوند. شناسایی مشخصات دینامیکی یاتاقان‌ها غلتشی جهت طراحی و تحلیل مناسب ماشین‌های دوار مانند انواع پمپ‌ها و الکتروموتورها ضروری و لازم است. مشخصات دینامیکی یاتاقان‌های غلتشی با استفاده از نظریه الاستوهیدرودینامیک قابل شناسایی است. نظریه الاستوهیدرودینامیک که به اختصار EHL نوشته می‌شود بر پایه دینامیک لایه روغن و تغییر شکل‌های الاستیک سطوح تماس تحت فشار توسعه یافته است. روش‌های حل که در این نظریه به کار می‌روند به دلیل پیچیدگی موضوع بسیار متنوع و گسترده هستند. از

این رو در این گزارش ابتدا نظریه الاستوهیدرودینامیک معرفی می شود و تاریخچه گسترش آن به اختصار توضیح داده می شود. در بخش بعدی معادلات اساسی الاستوهیدرودینامیک در تماس خطی و نقطه ای بدست می آیند و در نهایت بر روی روش های حل موجود بحث خواهد شد.

در یاتاقان های غلتشی ضریب میرایی و سختی رابطه مستقیمی با رفتار روغن و سطوح در ناحیه تماس ساچمه ها یا غلطک ها دارد. از این رو مطالعه دینامیک و رفتار حاکم بر یک سیستم روغن کاری شده جهت شناسایی مشخصات دینامیکی یاتاقان ها از اهمیت فراوانی برخوردار است. در اغلب موارد ضخامت لایه سیال با استفاده از هندسه سطوح تماس تعیین می شود. اما زمانی که فشار به اندازه کافی بالا باشد، تغییر شکل الاستیک سطوح در حال تماس قابل صرف نظر کردن نیست و در نتیجه این تغییر شکل ضخامت فیلم سیال نیز تحت تاثیر قرار خواهد گرفت. نظریه روغن کاری در چنین مسائلی بسیار پیچیده است و اصطلاحاً روغن کاری الاستوهیدرودینامیک نامیده می شود. شماتیکی از این مورد در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱- شماتیکی از روغن کاری الاستوهیدرودینامیک بین دو سطح تغییر شکل داده شده

تئوری روغن کاری از حدود یک قرن پیش شروع شد. رینولدز اولین بار معادلات جریان مواد نیوتنی را در درزها توصیف کرد [۳]. تقریباً در همین زمان هر تیز چگونگی تغییر شکل الاستیک دو سطح منحنی در تماس را توصیف می کند. حدود پنجاه سال بعد ارتل و گروبین با ترکیب این دو اثر نظریه الاستوهیدرودینامیک را ارائه دادند [۴]. از آن به بعد پیشرفت های نظری و تجربی قابل ملاحظه ای در این زمینه صورت گرفت.

پتروسویچ اولین فردی بود که راه حل های عددی برای حل همزمان معادله رینولدز و معادله الاستیسته ارائه داد. دوسون و هیگینسون راه حل های عددی برای حل این معادلات ارائه دادند [۵]. در دهه های گذشته روشهایی برای حل مجموعه معادلات EHL ارائه شده است. برای نمونه روش های مستقیم ارائه شده اند که با استفاده از آن ها توزیع فشار برای ضخامت لایه روغن مشخص بدست می آید. در مرحله بعدی از الگوریتم های تکراری مانند گوس شیدل و نیوتن رافسون برای حل همزمان معادلات الاستیسته و هیدرودینامیک استفاده می شود. همروک و دوسون [۶]، چیتندن و همکاران [۷] و اوکامرا نمونه ای از تحقیقاتی هستند که از روش مذکور استفاده کرده اند. روش معکوس، که همان روش دوسون و هیگینسون بود نیز توسط ایوانز و اسنیدل [۸] به تماس های مدور اعمال شد. روش مولتی گرید که توسط برنت [۹] ابداع شده بود توسط لوبرک [۱۰] به معادلات الاستوهیدرودینامیک اعمال شد. اگرچه این روش در مقایسه با دیگر روش هایی که پیشتر به آن ها اشاره شد به طور قابل ملاحظه ای نرخ همگرایی را افزایش داد، همچنان تخمین انتگرال تغییر شکل الاستیک بیشترین زمان محاسبه را به خود اختصاص می داد. علاوه بر این روش ها در بارهای زیاد ناپایدار می شوند. ونر [۱۱] به کمک روش انتگرال گیری چندسطحی که توسط برنت و لوبرک [۱۲] توسعه یافته بود و روش های آرام کننده توزیعی توانست الگوریتمی را که برای تماس نقطه ای و خطی پایدار بود را ابداع کند. درجه پیچیدگی این الگوریتم برابر  $n \ln(n)$  است که در آن  $n$  تعداد مجهولات می باشد. با ترکیب روشهای مختلف می توان حتی مسائل گذرا را نیز حل کرد. با استفاده از الگوریتم های جدید امکان مطالعه اثر سطح مانند اعوجاج و زبری و ... فراهم گردیده است. علاوه بر این امکان در نظر گرفتن مدل های پیچیده تر برای رفتار روغن در فشارها و دماهای مختلف وجود دارد.

در سال ۱۹۸۸ رهنجات<sup>۱</sup> و همکارانش فرکانس گذر توییها را در حضور روغن کاری الاستوهیدرودینامیک مورد مطالعه قرار دادند نتیجه کار ایشان این بود که در حضور روغن کاری الاستوهیدرودینامیک نیز یک پیک در محل فرکانس گذر توییها در پاسخ فرکانسی سیستم مشاهده می شود.

در سال ۱۹۹۶ هگیو<sup>۲</sup> و همکارانش تماس الاستوهیدرودینامیک را بصورت یک سیستم یک درجه آزادی معادل مدل نمودند. ایشان برای بدست آوردن ضرایب سفتی و استهلاک لزج از مدل تماسی هرتز و روابط تجربی استفاده کردند. نمونه مدل ایشان در شکل زیر نشان داده شده است.

## ۲- محاسبه سختی و میرایی یاتاقان های غلطکی

سختی و میرایی معادل یاتاقان ها از مهمترین پارامترهای دینامیکی یک تجهیز دوار محسوب می شوند. تعیین سختی و میرایی یاتاقان های غلطکی نیازمند یافتن رابطه جابه جایی و بار بر روی غلطک ها می باشد. این خود نیازمند استفاده از تئوری الاستوهیدرودینامیک است. بنابراین این بخش شامل دو مرحله است که ابتدا روشی تقریبی برای بیان رابطه جابه جایی و بار بر روی یاتاقان های استخراج می شود. در گام بعدی برای یاتاقانی که از تعداد زیادی غلطک تشکیل شده است سختی و میرایی معادل استخراج می شود.

### ۱-۲ ارائه روش تقریبی جهت تعیین توزیع فشار بر روی غلطک ها

در این مرحله با معرفی پارامترهای هندسی مهم بین سطوح یاتاقان و غلطک ها روشی برای حل تقریبی معادله الاستوهیدرودینامیک ارائه می شود. بر اساس نتایج تحلیل، رابطه بار و جابه جاییها با استفاده از مدل تقریبی ارائه خواهد شد. معادله در تماس خطی به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} + \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial T} = 0 \quad (1)$$

که در آن  $P(x)$  و  $H(x)$  عبارتند از فشار و ضخامت بی بعد،  $\bar{\rho}(P)$  و  $\bar{\eta}_p$  عبارتند از چگالی و لزجت بی بعد و  $\lambda$  یک پارامتر سرعت بی بعد است. با صرف نظر از مشتقات زمانی معادله رینولدز در حالت پایدار بی بعد به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \lambda} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

با استفاده از روش تفاضل محدود و به کمک گسسته سازی، مقدار باقیمانده معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$r_{i,j} = \frac{\bar{\rho}_{i+\frac{1}{2},j} H_{i+\frac{1}{2},j}^3}{\bar{\eta}_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x^2} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \frac{\bar{\rho}_{i-\frac{1}{2},j} H_{i-\frac{1}{2},j}^3}{\bar{\eta}_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x^2} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - f_i \quad (3)$$

که در آن:

$$f_i = \lambda \left( \frac{\bar{\rho}_{i+1,j} H_{i+1,j} - \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\bar{\rho}_{i,j,k+1} H_{i,j,k+1} - \bar{\rho}_{i,j,k} H_{i,j,k}}{\Delta T} \right) \quad (4)$$

<sup>1</sup> Rahnej at

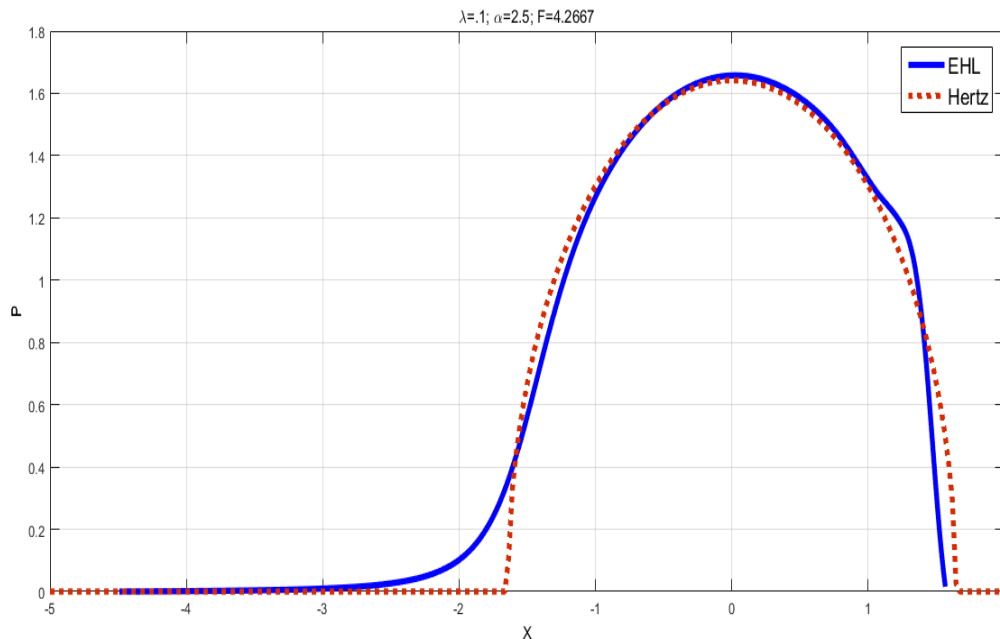
<sup>2</sup> Hagi u

$$f_i = \lambda \left( \frac{\bar{\rho}_{i+1,j} H_{i+1,j} - \bar{\rho}_{i,j} H_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\bar{\rho}_{i,j,k+1} H_{i,j,k+1} - \bar{\rho}_{i,j,k} H_{i,j,k}}{\Delta T} \right)$$

بر همین اساس می توان در هر بار ریلکسیشن فشار را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$p_{i-new} = p_i - \frac{r_i}{\gamma \frac{\partial r_i}{\partial p_i}} \quad (5)$$

توجه شود که در این معادله  $\gamma$  ضریب تحت ریلکسیشن است و به منظور افزایش همگرایی اعمال می شود. توجه شود که جمله اول در معادله (۳) بعد از هر حلقه  $V$  به روز می شود اما جمله دوم بعد از یک تکرار کامل در یک سیکل زمانی به روز می شود. به طور خلاصه و از دیدگاه الگوریتمی برای به دست آوردن فشار ابتدا بازه ای مشخص برای تغییرات ضخامت قسمت مرکزی روغن در نظر گرفته می شود و به ازای هر مقدار از آن مقدار ضخامت لایه روغن به صورت عددی محاسبه می شود. سپس طی مراحل عددی تکرارشونده روی دو طرف معادله رینولدز مقدار فشار اصلاح می شود تا خطای محاسبات به مقداری قابل قبول تقلیل بیابد. در پایان با حذف مقادیر منفی فشار نمودار ضخامت لایه روغن برحسب فشار مطابق شکل (۲) رسم می شود. این نمودار نشان می دهد با افزایش ضخامت لایه روغن پروفیل فشار به فشار هر تزی میل کرده و فرض تماس الاستوهیدرودینامیک تقویت می شود.



شکل ۲. نمودار تغییرات فشار برحسب ضخامت فیلم روغن

## ۲-۲ تعیین سختی و میرایی معادل یاتاقان های غلظشی کل

سختی و میرایی با استفاده از مدل هایی که رابطه بین جابه جایی و نیروی وارد بر هر غلظک را بیان می کنند به دست می آیند. از آنجایی که این روابط به شدت غیرخطی هستند برای تعیین سختی و میرایی معادل یاتاقان باید یک فرایند غیرخطی برای یافتن جواب در نظر گرفته شود.

برای به دست آوردن پارامترهای تماس همان طور که پیش تر اشاره شد در یاتاقان های غلظکی تماس از نوع خطی می باشد. هر تزی در این حالت مکانیک تماس خطی به صورت یک معادله خطی استاندارد به فرم زیر بیان می شود.

$$\begin{aligned} h &= h_0 + g + C_p, \\ h.p &= 0, \quad p \geq 0, \quad h \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

که در  $h$  اختلاف بین سطوح و  $G$  ماتریسی است که اجزای آن ضرایب تاثیر مربوط به فشار و تغییر شکل تماسی می باشند.  $h_0$  اختلاف سطوح تماس در حالت تماس صلب و  $g$  هندسه تماس می باشد. برای حل چنین معادله ای از روش عددی لمکه<sup>۳</sup> استفاده می شود.

### ۳-۲ محاسبه سختی بین سطوح

فنریت در تماس الاستوهیدرودینامیک به کمک معادله ای که جابجایی از نقطه تعادل  $\delta$  را به نیروی اعمالی  $F_e$  مرتبط می کند محاسبه می شود. به عبارت دیگر برای محاسبه سختی کافی است رابطه بین جابه جایی و نیروی بین سطوح به دست آید. مقدار نیرو از معادله ضخامت لایه روغن محاسبه می شود. جابه جایی بین سطوح با زمان تغییر نمی کند. توابع فشار و ضخامت فیلم روغن نیز از زمان مستقل هستند. بنابراین جمله مشتق زمانی در معادله ضخامت فیلم روغن حذف خواهد شد. روابط زیر بر دینامیک تماس حاکم خواهند بود

$$b = \sqrt{\frac{8WR}{\pi E}}, \quad p_h = \frac{2W}{\pi b}, \quad \bar{\alpha} = \alpha \frac{2W}{\sqrt{\frac{8WR\pi}{E}}} \quad (12)$$

که در آن  $b$  طول تماس،  $W$  بار و  $\alpha$  ضریب فشار-لزجت می باشند سپس خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{6\pi\eta_0 u_m R^2}{b^2 W}, \quad W = \frac{M \sqrt{\frac{3}{4}(\eta_0 u_m) RE}}{\pi}, \quad M = \pi W \left( \frac{3}{4}(\eta_0 u_m) RE \right)^{-0.5} \quad (13)$$

که نتیجه میدهد:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha \frac{2W \sqrt{\pi E}}{\pi \sqrt{8WR}} \\ &= \frac{2\alpha \sqrt{\pi E}}{\pi \sqrt{8R}} \left( \frac{3}{4} \eta_0 u_m RE \right)^{0.25} \sqrt{M} \\ &= L \sqrt{M} \\ L &= \alpha \frac{2W \sqrt{\pi E}}{\pi \sqrt{8WR}} M^{-0.5} \end{aligned} \quad (14)$$

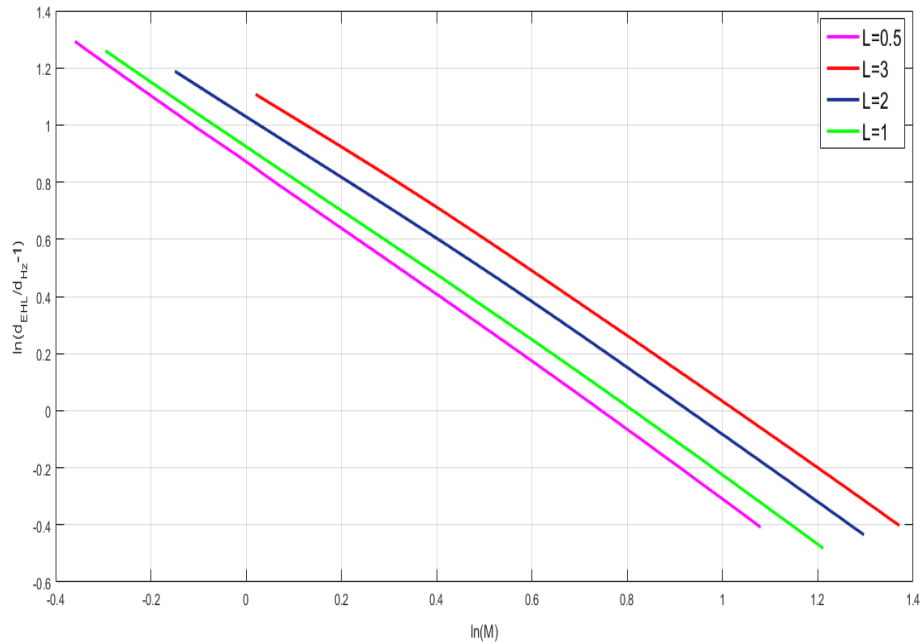
که در آن  $M$  پارامتر لود و  $L$  پارامتر مربوط به سیال روانکار است. با توجه به بی بعد سازی ها، با افزایش بار و رسیدن تقریبی به حالت تماس خشک (هرتزی)، جابه جایی به سمت ۱ میل خواهد کرد.

در شکل (۳) نمودار نسبت تغییر شکل الاستوهیدرودینامیک به تغییر شکل هرتزی بر حسب پارامتر بی بعد  $M$  برای مقادیر مختلف  $L$  رسم شده است. در این نمودار به کمک شیب و عرض از مبدا، معادله منحنی به صورت تابعی از پارامتر  $L$  محاسبه می شود که به کمک آن می توان فنریت معادل را محاسبه کرد.

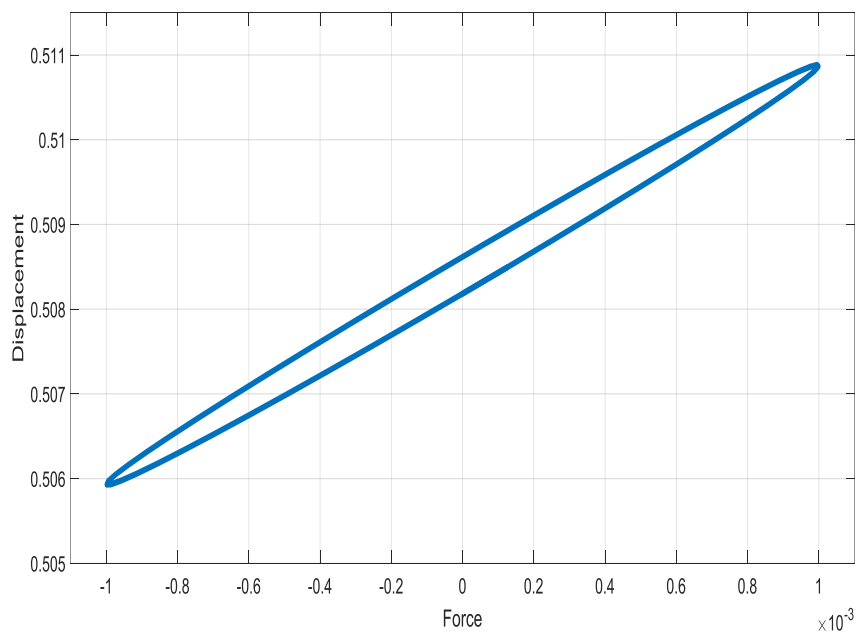
<sup>3</sup> Lemke's pivoting algorithm

## ۴-۲ محاسبه میرایی سطوح

برای به دست آوردن میرایی، معادلات به صورت زمانمند حل می‌شوند. در این حالت جابه‌جایی با زمان تغییر می‌کند. تغییرات جابه‌جایی صلب سطوح نسبت به هم به صورت سینوسی در نظر گرفته شده است. با حل زمانی نیرو بر حسب جابه‌جایی، یک بیضی در صفحه به دست می‌آید. می‌توان اثبات نمود که مساحت داخلی بیضی انرژی برابر است با کاری که در هر سیکل توسط نیرو انجام می‌شود. بنابراین مساحت آن برابر است با نیروی میرایی ناشی از لزجت سیال روانکار. شکل (۴) این بیضی را نشان می‌دهد.



شکل ۳. نمودار نسبت تغییر شکل الاستوهیدروداینامیک به تغییر شکل هرتزی بر حسب پارامتر بی بعد  $M$



شکل ۴- بیضی انرژی - نیرو بر حسب جابه‌جایی

## ۵-۲ محاسبه سختی مجموعه یاتاقان

نیاز به یک نرم افزار جامع جهت محاسبه سختی و میرایی یاتاقان های غلتشی ما را بر این داشته که در این تحقیق نرم افزاری جامع جهت محاسبه آنها برای مقادیر مختلف پارامترهای سیستم دوار و روغن روانکار توسعه دهیم. این نرم افزار به طور جامع انواع سختی و میرایی یاتاقان های غلتشی را با استفاده از مدل های دینامیکی مختلف روغن محاسبه می کند. شکل (۵) نمایی از ورودی این نرم افزار را نشان می دهد. در این نرم افزار امکان رسم نیروها در غلتک های مختلف وجود دارد.

شکل ۵- نمایی از نرم افزار محاسبه مشخصات دینامیکی یاتاقان های غلطکی

## نتیجه گیری

در این گزارش به کمک شبیه سازی عددی روشی برای محاسبه سختی و میرایی معادل در یاتاقان های غلطکی ارایه شد. رفتار توزیع فشار بر اساس تغییر بار بررسی شد و نشان داده شد که افزایش بار منجر به نزدیک شدن توزیع فشار به توزیع فشار هرتزی و تقریب فرض تماس خشک می گردد. به کمک مساحت داخلی لوپ نیروی تماسی برحسب جایابی نسبی، نیروی میرایی ناشی از لزجت سیال روانکار محاسبه شد. در محاسبات مربوط به تماس خطی نشان داده شد در فضای لگاریتمی رابطه بین تغییر شکل الاستوهیدوردینامیک به تغییر شکل هرتزی بر حسب پارامتری بعد  $M$  به صورت یه خط تقریب زده می شود که از مشخصات هندسی آن خط می توان فنریت معادل را به دست آورد.

مرجع

- [۱] H. Lu, "High order finite element solution of elastohydrodynamic lubrication problems," The University of Leeds, 2006.
- [۲] C. E. Goodyer, *et al.*, "Adaptive mesh methods for elastohydrodynamic lubrication," in *ECCOMAS CFD 2001: Computational Fluid Dynamics Conference Proceedings*, 2001.
- [۳] O. Reynolds, "On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 40, pp. 191-203, 1886.

- [۴] A. Grubin and I. Vinogradova, "Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces," *Investigation of the contact Machine Components*, pp. 115-166, 1949.
- [۵] D. Dowson and G. Higginson, "A numerical solution to the elasto-hydrodynamic problem," *Journal of mechanical engineering science*, vol. 1, pp. 6-15, 1959.
- [۶] B. J. Hamrock and D. Dowson, "Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: Part 1—Theoretical formulation," *Journal of Lubrication Technology*, vol. 98, pp. 223-228, 1976.
- [۷] R. Chittenden, *et al.*, "A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. I. Direction of lubricant entrainment coincident with the major axis of the Hertzian contact ellipse," in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1985, pp. 245-269.
- [۸] H. Evans and R. Snidle, "Inverse solution of Reynolds' equation of lubrication under point-contact elastohydrodynamic conditions," *Journal of Lubrication Technology*, vol. 103, pp. 539-546, 1981.
- [۹] A. Brandt and O. E. Livne, *Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics* vol. 67: SIAM, 2011.
- [۱۰] A. LUBRECHT, "The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques(Ph. D. Thesis)," 1987.
- [۱۱] C. VENNER, "Multilevel solution of the EHL line and point contact problems(Ph. D. Thesis)," 1991.
- [۱۲] A. Brandt and A. Lubrecht, "Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 90, pp. 348-370, 1990.
- [۱۳] C. E. Goodyer, "Adaptive numerical methods for elastohydrodynamic lubrication," PhD thesis, University of Leeds, Leeds, 2001.
- [۱۴] R. O, "On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil.," *Phil. Trans. R. Soc.*, vol. 177, pp. 551-556, 1886.